پاسخ مسائل امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ترم ۲-۹۷-۹۶

۱. اگر $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ آنگاه مقدار $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ را در $(0,0)$ محاسبه کنید.

حل. ابتدا ضابطه‌ی $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ را بر $\mathbb{R}^2$ تعیین می‌کنیم.

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y} & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در نتیجه

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3(x^2+y^2)-2y^2x^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{x^4}-0}{x}=1\end{aligned}$$

۲. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر مفروض است.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+|xy|} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الف) ثابت کنید f در $(0,0)$ پیوسته است.
ب) وجود مشتقات جزئی f را در $(0,0)$ بررسی کنید.

حل. الف) نشان می‌دهیم $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$.
(روش اول) با استفاده از تعریف، نشان می‌دهیم

$$\forall\epsilon>0,\quad \exists\delta>0,\qquad \|(x,y)-(0,0)\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x,y)-0|<\epsilon$$

برای $\epsilon>0$، با توجه به اینکه

$$|f(x,y)-0|=\frac{|x|\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+|xy|}=|x|\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+|xy|}\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)-(0,0)\|$$

کافی است $\delta\leq\epsilon$ انتخاب شود.
(روش دوم) با توجه به نامساوی به دست آمده در بالا، یعنی $|f(x,y)-0|\leq\|(x,y)-(0,0)\|$، خواهیم داشت $0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)-0|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\|(x,y)-(0,0)\|=0$ و در نتیجه $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$.

ب) با استفاده از تعریف،

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2}+0}}{x}=1$$

به همین ترتیب،

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{y}=0$$

۳. تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$ مفروض است.
الف) کلیه‌ی سوی‌های یکه‌ی $\mathbf{u}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$ را تعیین کنید که مشتق سویی f در $(0,0)$ و در سوی $\mathbf{u}$ وجود داشته باشد.
ب) آیا f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

حل. الف) با استفاده از تعریف مشتق سویی،

$$D_uf(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+at,0+bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{atbt}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{ab}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{ab}}{t^{\frac{1}{3}}}$$

به این ترتیب اگر $ab\neq 0$ حد فوق وجود نخواهد داشت. در حالتی که $ab=0$ آنگاه حد فوق برابر صفر بوده، مشتق سویی وجود دارد. در نتیجه فقط در سوی‌های $\mathbf{i}$، $\mathbf{-i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{-j}$ مشتق سویی وجود دارد.
ب) بنابر قضایای بیان شده، اگر f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه مشتق سویی آن در تمام سوی‌ها در این نقطه وجود دارد. با توجه به قسمت قبل (عدم وجود مشتق سویی در سوی‌هایی که $ab\neq 0$)، این تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۴. فرض کنید $f:\mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد. اگر z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y به صورت ضمنی با معادله‌ی $f(x\sqrt{z},y\sqrt{z})=۰$ داده شده باشد، نشان دهید $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=-۲z$.

حل. بنابه فرض تابع مشتق‌پذیر $z(x,y)$ وجود دارد که برای هر (x,y) در معادله‌ی زیر صدق می‌کند.

$$f(x\sqrt{z(x,y)},y\sqrt{z(x,y)})=۰$$

با قرار دادن $u=u(x,y)=x\sqrt{z(x,y)}$ و $v=v(x,y)=y\sqrt{z(x,y)}$ خواهیم داشت $f\big(u(x,y),v(x,y)\big)=۰$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f\big(u(x,y),v(x,y)\big)=۰ \quad &\Rightarrow \quad f_u\frac{\partial u}{\partial x}+f_v\frac{\partial v}{\partial x}=۰\\ &\Rightarrow \quad f_u(\sqrt{z}+x\frac{۱}{۲\sqrt{z}}\frac{\partial z}{\partial x})+f_v(y\frac{۱}{۲\sqrt{z}}\frac{\partial z}{\partial x})=۰\\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\sqrt{z}f_u}{\frac{x}{۲\sqrt{z}}f_u+\frac{y}{۲\sqrt{z}}f_v}\end{aligned}$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sqrt{z}f_v}{\frac{x}{۲\sqrt{z}}f_u+\frac{y}{۲\sqrt{z}}f_v}$$

در نتیجه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\sqrt{z}}{\frac{۱}{۲\sqrt{z}}}(\frac{xf_u+yf_v}{xf_u+yf_v})=-۲z$$

۵. در چه نقطه‌ای از رویه‌ی S به معادله‌ی $z = xy - y$ صفحه‌ی مماس بر S با صفحه‌ی $x + y + ۲z = ۰$ موازی است؟

حل. اگر تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y, z) = xy - y - z$ تعریف شده باشد آنگاه S رویه‌ای به معادله‌ی $f(x, y, z) = ۰$ خواهد بود. در نتیجه در هر نقطه از رویه، بردار ∇f بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در آن نقطه خواهد بود. فرض کنیم $p \in S$ نقطه‌ای به مختصات $(x_۰, y_۰, z_۰)$ باشد که صفحه‌ی مماس بر S در این نقطه موازی صفحه‌ی $x + y + ۲z = ۰$ باشد. در نتیجه بردار نرمال صفحه‌ی مماس، یعنی $\nabla f(p)$ موازی بردار نرمال این صفحه، یعنی بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ خواهد بود. به این ترتیب، اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد که $\nabla f(p) = \lambda(\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$. با توجه به اینکه $\nabla f(p) = (y_۰)\mathbf{i} + (x_۰ - ۱)\mathbf{j} + (-۱)\mathbf{k}$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y_۰ = \lambda \\ x_۰ - ۱ = \lambda \\ (-۱) = ۲\lambda \end{cases}$$

در نتیجه $\lambda = -\frac{۱}{۲}$ و از آنجا $y_۰ = -\frac{۱}{۲}$، $x_۰ = ۱ - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$ و $z_۰ = x_۰y_۰ - y_۰ = \frac{۱}{۴}$. به این ترتیب نقطه‌ی مورد نظر نقطه‌ای به مختصات $(\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴})$ است.