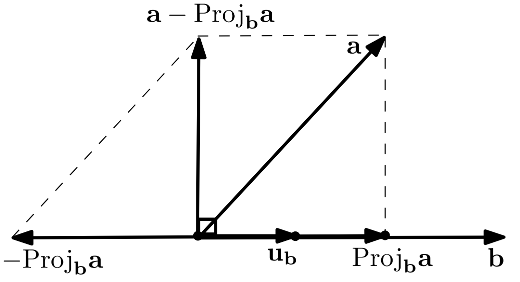
مقدمه‌ای بر بردارها



مؤلفین : دکتر منصور آقاسی دکتر فرید بهرامی
دکتر سید قهرمان طاهریان دکتر رسول نصر

بهمن ماه ۱۳۸۹

فصل ۱

مقدمه‌ای بر بردارها

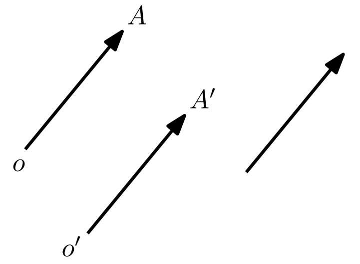
۱ — ۱ مفاهیم اولیه

یکی از اهداف این درس آشنایی با توابع برداری و تعمیم مفاهیم حسابان از توابع حقیقی به این دسته از توابع است. برای این منظور نخست به بحث بردار و مفاهیم وابسته به آن می‌پردازیم.

از جنبه‌ی تاریخی مفهوم بردار نخستین بار در علم فیزیک و برای بیان مفاهیمی مانند سرعت، نیرو، ... مطرح شد. ویژگی اصلی و مشخص‌کننده‌ی این مفاهیم داشتن **اندازه و جهت** است که از این پس آنها را بردار می‌نامیم و با حروف کوچک لاتین مانند $\mathbf{b}, \mathbf{a}$, ... نمایش می‌دهیم. در ادامه‌ی بحث به‌طور دقیق‌ترمفهوم بردار را مطرح خواهیم‌کرد. از لحاظ هندسی مفهوم بردار به‌وسیله‌ی یک پاره‌خط جهت‌دار قابل نمایش است که طول آن طول بردار و جهت آن جهت بردار است. برای برداری چون $\mathbf{a}$، اندازه‌ی $\mathbf{a}$ را با نماد $\|\mathbf{a}\|$ نشان می‌دهیم. نمایش‌های هندسی مختلف را **نمایش‌های یک بردار** می‌نامیم هرگاه پاره‌خط‌های نظیر آنها موازی، هم‌طول و هم‌جهت باشند. چنین نمایش‌هایی را **بردارهای هم‌سنگ** نیز می‌نامیم (شکل ۱ — ۱).

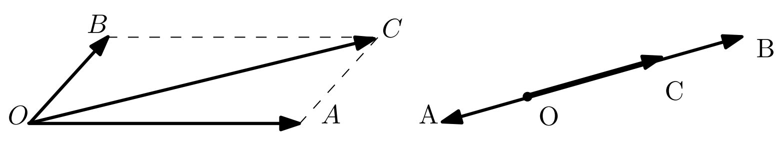
بر مبنای این تعریف دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را مساوی نامیده و با نماد $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم هرگاه دارای نمایش‌های هندسی هم‌سنگ باشند. روشن است که هر نمایش هندسی بردار $\mathbf{a}$ مشخص‌کننده‌ی یک نقطه‌ی آغازی مانند A و یک نقطه‌ی پایانی مانند B است. در این صورت $\mathbf{a}$ را با نماد $\overrightarrow{AB}$ نیز نمایش می‌دهیم. دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را **موازی** می‌نامیم هرگاه

راستاهای متناظر آنها موازی باشند. در این صورت می‌نویسیم $\mathbf{a}\|\mathbf{b}$.



شکل ۱—۱. بردارهای هم‌سنگ.

برای دو بردار غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با انتخاب نقطه‌ای مانند O، نقاط A و B وجود دارند به گونه‌ای که بردار $\overrightarrow{OA}$ نمایش هندسی $\mathbf{a}$ و بردار $\overrightarrow{OB}$ نمایش هندسی $\mathbf{b}$ باشد. در این صورت نقطه‌ای چون C در صفحه‌ی در برگیرنده‌ی O، A و B وجود دارد به قسمی که چهار ضلعی $OACB$ یک متوازی‌الاضلاع است. بردار با نمایش هندسی $\overrightarrow{OC}$ را حاصل جمع $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نامیده و با $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۲).
به سادگی می‌توان نشان داد که بردار حاصل جمع مستقل از انتخاب نقطه‌ی O است. به این معنی که اگر O' نقطه‌ای غیر از O و $\overrightarrow{O'A'}$ و $\overrightarrow{O'B'}$ به ترتیب نمایش‌های هندسی دیگری برای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ باشند، با تکرار روند فوق، بردار $\overrightarrow{O'C'}$ هم‌سنگ $\overrightarrow{OC}$ است. در حالتی که $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ موازی باشند، بردار حاصل جمع، برابر بردار نظیر حاصل جمع جبری پاره‌خط‌های OA و OB تعریف می‌شود (شکل ۱—۲). مشاهده می‌شود که عمل جمع برداری خاصیت‌های جابجایی و شرکت‌پذیری دارد.

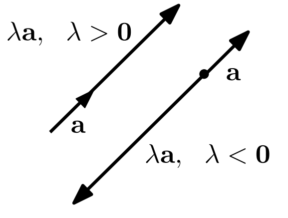


شکل ۱—۲. جمع بردارها.

در بررسی مواردی که در برگیرنده‌ی مفهوم بردار است، وجود عنصری با اندازه‌ی صفر ولی بدون جهت ضروری است. این عنصر منحصر به فرد را **بردار صفر** نامیده و آن را با نماد $\mathbf{0}$ نشان می‌دهیم. از لحاظ هندسی چنین برداری با یک نقطه قابل نمایش است. برای بردار دلخواه $\mathbf{a}$ بردارهای $\mathbf{a}+\mathbf{0}$ و $\mathbf{0}+\mathbf{a}$ را برابر $\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم. برای بردار غیرصفر $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$، برداری وجود دارد که نمایش هندسی آن $\overrightarrow{BA}$ است.

این بردار را **قرینه‌ی** $\mathbf{a}$ نامیده و با نماد $-\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم. روشن است که برای هر بردار $\mathbf{a}$ بردار $\mathbf{a} + (-\mathbf{a})$ همان بردار $\mathbf{0}$ است.

برای برداری چون $\mathbf{a}$ بانمایش هندسی $\overrightarrow{AB}$ و عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ که از این پس **اسکالر** نیز نامیده می‌شود نقطه‌ای مانند C بر خط گذرنده بر نقاط A و B وجود دارد به قسمی که $\| \overrightarrow{AC} \| = |\lambda| \| \overrightarrow{AB} \|$ و در حالتی که $\lambda > ۰$، $\overrightarrow{AC}$ با $\overrightarrow{AB}$ هم‌جهت است. در این حالت، بردار $\overrightarrow{AC}$ را ضرب اسکالر λ و بردار $\mathbf{a}$ نامیده و آن را با نماد $\lambda\mathbf{a}$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که $\lambda < ۰$، بردار $\lambda\mathbf{a}$ را به عنوان قرینه‌ی بردار $|\lambda|\mathbf{a}$ تعریف می‌کنیم (شکل ۱—۳). سرانجام اگر $\mathbf{a}$ بردار صفر یا λ اسکالر صفر باشد، $\lambda\mathbf{a}$ را بردار صفر تعریف می‌کنیم.



شکل ۱—۳. ضرب اسکالر در یک بردار.

برای هر دو اسکالر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b}$، ویژگی‌های زیر قابل تحقیق است.

$$(\lambda + \mu)\ \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} \quad , \quad \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \quad , \quad ۱\mathbf{a} = \mathbf{a}$$

مجموعه‌ی بردارهای هندسی با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالر حالت خاصی از یک ساختار ریاضی است که در تعریف زیر به آن می‌پردازیم.

تعریف ۱–۱–۱ مجموعه ناتهی V همراه با نگاشت‌های $+ : V \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto \mathbf{a} + \mathbf{b}$ و $\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ با ضابطه‌ی $(\lambda, \mathbf{a}) \longmapsto \lambda \cdot \mathbf{a} =: \lambda\mathbf{a}$ را یک **فضای برداری روی** $\mathbb{R}$ می‌نامیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

الف) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

ب) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$.

ج) عضوی چون $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ وجود دارد به قسمی که برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

د) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ عضوی چون $-\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ وجود دارد که $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

ه) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$، $۱\ \mathbf{a} = \mathbf{a}$.

و) برای هر $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$، $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ و $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.

ز) برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$، $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

از این پس نگاشت «$+$» را **عمل جمع برداری**، «$\cdot$» را **عمل ضرب اسکالری** و اعضای

V را **بردار می‌نامیم**. برای بردارهای $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}$ و اسکالر $\lambda\in\mathbb{R}$، بردار $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ را **جمع برداری** $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و بردار $\lambda\mathbf{a}$ را ضرب اسکالر λ در بردار $\mathbf{a}$ **می‌نامیم**. بردار $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$ را **بردار صفر** و برای بردار $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ بردار $-\mathbf{a}$ را **قرینه‌ی $\mathbf{a}$** می‌نامیم.
می‌توان ثابت کرد که بردار صفر در هر فضای برداری منحصر به فرد است. همچنین برای هر بردار $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ بردار قرینه‌ی $\mathbf{a}$ نیز یگانه است.

مثال ۱–۱–۲ بنابر آنچه بیان شد، مجموعه تمام بردارهای هندسی همراه با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر یک فضای برداری است.

مثال ۱–۱–۳ برای $n\in\mathbb{N}$ فرض کنیم $\mathbb{R}^n:=\{(x_1,\cdots,x_n)\ :\ x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$. در این صورت $\mathbb{R}^n$ با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری زیر یک فضای برداری است.

$$(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n):=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$$
$$\lambda(x_1,\cdots,x_n):=(\lambda x_1,\cdots,\lambda x_n)$$

مثال ۱–۱–۴ فرض کنیم $M_{m\times n}$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $m\times n$ با درایه‌های حقیقی باشد. در این صورت مجموعه‌ی $M_{m\times n}$ همراه با اعمال جمع ماتریسی و ضرب اسکالر با ماتریس تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

مثال ۱–۱–۵ فرض کنیم $I\subseteq\mathbb{R}$ یک بازه باشد. در این صورت مجموعه‌ی

$$C(I,\mathbb{R}):=\{f\mid \text{است } I \text{ تابعی پیوسته بر بازه‌ی } f:\ I\to\mathbb{R}\}$$

همراه با اعمال جمع توابع و ضرب اسکالر در توابع تشکیل یک فضای برداری می‌دهد.

مثال ۱–۱–۶ فرض کنیم $V=\mathbb{R}^+:=\{a\in\mathbb{R}\mid a>0\}$. روی V جمع برداری را به صورت $a\oplus b:=ab$ و ضرب اسکالری را با $\lambda\cdot a:=a^\lambda$ تعریف می‌کنیم. در این صورت V همراه با این اعمال تشکیل یک فضای برداری می‌دهد. (تحقیق کنید!)

تعریف ۱–۱–۷ فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی W از V را یک **زیرفضای برداری** V می‌نامیم هرگاه همراه با تحدید اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری V به W، یک فضای برداری باشد.

به سادگی مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی ناتهی $W \subseteq V$ یک زیرفضای برداری V است اگر و تنها اگر نسبت به اعمال جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد. به عبارت دیگر برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} \in \mathbf{W}$.

برای بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V و اسکالرهای $\lambda_۱, \cdots, \lambda_n$، بردار $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ را یک **ترکیب خطی** از بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

مجموعه‌ی تمام ترکیبات خطی بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ در V تشکیل یک زیرفضای برداری از V می‌دهد. این زیرفضا را با نماد $< \{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\} >$ نمایش می‌دهیم و آن را **زیرفضای تولید شده** توسط بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ می‌نامیم.

بردارهای $\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n$ را در V **مستقل خطی** می‌نامیم هرگاه از $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ نتیجه شود $\lambda_۱ = \cdots = \lambda_n = ۰$. در غیر این صورت این بردارها را **وابسته‌ی خطی** می‌نامیم.

مجموعه‌ی بردارهای $\{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\} \subseteq V$ را **یک پایه** برای V می‌نامیم هرگاه مستقل خطی باشند و $V =< \{\mathbf{a}_۱, \cdots, \mathbf{a}_n\} >$.

ثابت می‌شود که اگر V یک پایه‌ی n عضوی داشته باشد، هر پایه‌ی دیگر V نیز n عضو دارد. عدد منحصر به فرد n را **بعد فضای** V نامیده و آن را با نماد $\dim V$ نمایش می‌دهیم.

در حالتی که هیچ زیر مجموعه‌ی باپایانی از بردارهای مستقل خطی فضای برداری را تولید نکند، فضا را **با بعد بی‌پایان** می‌نامیم.

مثال ۱–۱–۸ بردارهای $\mathbf{a} = (۱, ۱, -۲)$ و $\mathbf{b} = (۱, ۲, ۳)$ در $\mathbb{R}^۳$ مستقل خطی هستند. در واقع اگر $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = ۰$ آنگاه λ, μ جواب‌های دستگاه زیر هستند.

$$\begin{cases} \lambda + \mu = ۰ \\ ۲\lambda + \mu = ۰ \\ ۳\lambda - ۲\mu = ۰ \end{cases}$$

که به وضوح $\lambda = \mu = ۰$ تنها جواب آن است. امّا به ازای $\mathbf{c} = (۲, ۲, -۴)$، بردارهای $\mathbf{c}, \mathbf{a}$ وابسته‌ی خطی هستند، زیرا به ازای اسکالرهای غیرصفر $\lambda = ۲$ و $\mu = -۱$، $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{c} = ۰$. به همین ترتیب به‌ازای $\mathbf{d} = (۳, ۵, ۴)$ بردارهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ وابسته خطی هستند. زیرا به ازای اسکالرهای $\lambda_۱ = ۲, \lambda_۲ = ۱, \lambda_۳ = -۱$، $\lambda_۱\mathbf{a} + \lambda_۲\mathbf{b} + \lambda_۳\mathbf{d} = ۰$.

مثال ۱–۱–۹ مجموعه‌ی $W = \{(x, y, ۰) : x, y \in \mathbb{R}\}$ یک زیرفضای برداری $\mathbb{R}^۳$ است. بردارهای $\mathbf{a} = (۲, ۰, ۰)$ و $\mathbf{b} = (۰, ۳, ۰)$ در W مستقل هستند و برای هر

$\mathbf{c}=(x,y,0)$ می‌توان نوشت $\mathbf{c}=\frac{x}{2}\mathbf{a}+\frac{y}{3}\mathbf{b}$. یعنی مجموعه‌ی $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ تشکیل یک پایه برای W می‌دهد. بنابراین $\dim W=2$.

مثال ۱–۱–۱۰ فرض کنیم $V=C(I,\mathbb{R})$، $f_0(x)=1$، $f_1(x)=x$، $f_2(x)=x^2$ و $f_3(x)=x^3$. در این صورت زیر فضای تولید شده به وسیله‌ی f_3,f_2,f_1,f_0 عبارت است از $P_3(I,\mathbb{R})$، چندجمله‌ای‌های یک متغیره با درجه کوچکتر یا مساوی ۳. چون f_3,f_2,f_1,f_0 مستقل خطی هستند، $\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$ تشکیل یک پایه برای زیرفضای $P_3(I,\mathbb{R})$ می‌دهد. بنابراین $\dim P_3(I,\mathbb{R})=4$. به ازای $f_0(x)=1$، $f_1(x)=x$، ...، $f_n(x)=x^n$، ... زیرفضای تولید شده به‌وسیله‌ی f_0، f_1، $\cdots$ عبارت است از $P(I,\mathbb{R})$، فضای چندجمله‌ای‌های یک متغیره. هر زیرمجموعه‌ی دلخواه از $\{f_0,f_1,\ldots\}$ یک مجموعه از بردارهای مستقل خطی است. در واقع $P(I,\mathbb{R})$ یک زیرفضای با بعد بی‌پایان است و $\{f_0,f_1,\ldots\}$ یک پایه برای آن است.

مثال ۱–۱–۱۱ در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ ، برای $i=1,\cdots,n$ قرار می‌دهیم $\mathbf{e}_i:=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)$ که ۱ مولفه‌ی i ام $\mathbf{e}_i$ است. در این صورت برای هر $(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$، $(x_1,\cdots,x_n)=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$. به این ترتیب $\mathbb{R}^n=<\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}>$. مشاهده می‌شود که بردارهای $\mathbf{e}_n,\cdots,\mathbf{e}_1$ مستقل خطی نیز هستند. بنابراین مجموعه‌ی $\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_n\}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است، در نتیجه $\dim\mathbb{R}^n=n$. این پایه را **پایه‌ی استاندارد** $\mathbb{R}^n$ می‌نامیم.

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین استقلال خطی، فضای توسیع یافته و پایه‌ی فضا در فضای برداری n بعدی $\mathbb{R}^n$ بیان می‌شود.

قضیه ۱–۱–۱۲ فرض کنیم B یک زیر مجموعه‌ی n عضوی از $\mathbb{R}^n$ باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر معادل هستند.

الف) $\mathbb{R}^n=<B>$.

ب) B مستقل خطی است.

ج) B یک پایه برای $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۱–۱–۱۳ فرض کنیم V و W دو فضای برداری باشند. نگاشت $T : V \to W$ را یک **نگاشت یا تبدیل خطی** می‌نامیم هرگاه برای هر اسکالر λ و هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ داشته باشیم

$$T(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$$

یک تبدیل خطی $T : V \to W$ بردارهای فضای V را طوری به بردارهای فضای W تصویر می‌کند که تصویرِ جمع و ضربِ اسکالرِ دو بردار با جمع و ضربِ اسکالرِ تصویرِ این دو بردار یکی باشد. این نکته ممکن است کمی در نگاه اول پیچیده باشد ولی با کمی دقت دیده می‌شود که در واقع تبدیل‌های خطی ساختار جبری فضا را حفظ می‌کنند. طبق تعریف تبدیل خطی، $T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$. بنابر این اگر دو بردار را با هم جمع کنیم و تصویر مجموع را به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که تصویر بردارها را با هم جمع کنیم. به همین ترتیب طبق تعریف تبدیل خطی $T(\lambda\mathbf{a}) = \lambda T(\mathbf{a})$. بنابر این اگر بردار $\mathbf{a}$ را در اسکالر λ ضرب اسکالری کنیم و تصویر $\lambda\mathbf{a}$ به دست آوریم به همان نتیجه می‌رسیم که ابتدا بردار $\mathbf{a}$ را تصویر و سپس آن را در λ ضرب اسکالری کنیم. به این ترتیب یک تبدیل خطی، هر ترکیب خطی از بردارها را به ترکیب خطی تصویر آنها تبدیل می‌کند. نام تبدیل خطی برای این نگاشت به خاطر همین نکته است.

در صورتی که T یک‌به‌یک و پوشا نیز باشد آنرا یک **یکریختی** و فضاهای برداری V و W را **یکریخت** می‌نامیم. می‌توان نشان داد که اگر $T : V \to W$ یک یکریختی و $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ یک پایه برای V باشد آنگاه $\{T(\mathbf{a}_1), \cdots, T(\mathbf{a}_n)\}$ یک پایه برای W است. پس در این حالت $\dim V = \dim W$.

نگاشت‌های خطی رابطه‌ی بسیار نزدیکی با ماتریس‌ها دارند. یک ماتریس $m \times n$ مانند $M = (a_{ij})$ آرایه‌ای با m سطر و n ستون از اسکالرهای a_{ij} است.

به هر نگاشت خطی $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ می‌توان یک ماتریس $m \times n$ به شکل $A = (a_{ij})_{m \times n}$ نظیر کرد. برای مشخص نمودن درایه‌های این ماتریس فرض کنیم $\{e_1, \cdots, e_n\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^n$ و $\{e'_1, \cdots, e'_m\}$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^m$ باشد. در این صورت اسکالرهای a_{ij} وجود دارند به قسمی که $T(e_i) = a_{i1}e'_1 + \cdots + a_{im}e'_m$ $(i = 1, \cdots, n)$. در این صورت مقدار $T(\mathbf{x})$ را به ازای $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ می‌توان به صورت $A\mathbf{x}^{\mathbf{t}}$ نیز بیان کرد که $\mathbf{x}^{\mathbf{t}}$ ترانهاده‌ی $\mathbf{x}$ است.

مثال ۱–۱–۱۴ نگاشت $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ با ضابطه‌ی $T(x, y) = (2x+y, x-y, x+4y)$ یک تبدیل خطی است. این نگاشت یک به یک هست ولی پوشا نیست. ماتریس

نظیر این نگاشت یک ماتریس ۲ × ۳ به شکل $A = (a_{ij})_{3\times 2}$ است. برای مشخص نمودن درایه‌های این ماتریس ابتدا $e_1 = (1, 0)$، $e_2 = (0, 1)$ پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^2$ و $e'_1 = (1, 0, 0)$، $e'_2 = (0, 1, 0)$، $e'_3 = (0, 0, 1)$, پایه‌ی استاندارد $\mathbb{R}^3$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$T(e_1) = T(1, 0) = (2, 1, 1) = 2\ e'_1 + 1\ e'_2 + 1\ e'_3$$

بنابر این $(2, 1, 1)$ ستون اول ماتریس است. به همین ترتیب،

$$T(e_2) = T(0, 1) = (1, -1, 4) = 1\ e'_1 + (-1)\ e'_2 + 4\ e'_3$$

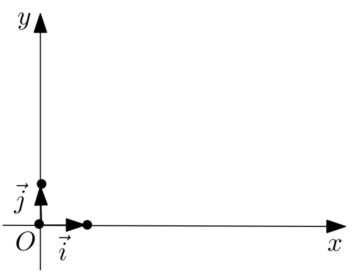
بنابر این $(1, -1, 4)$ ستون دوم ماتریس است. پس ماتریس A به شکل زیر است.

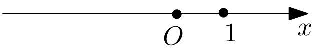
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

مثال ۱–۱–۱۵ فضای برداری $W = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$ با فضای برداری $\mathbb{R}^2$ یکریخت است. زیرا به ازای نگاشت یک به یک و پوشای $T : W \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ی $T(x, y, 0) = (x, y)$ به سادگی تحقیق می‌شود که $T(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b})$.

در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه‌ی تمام بردارهای هندسی در صفحه (فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^3)$ یکریخت هستند. بدین منظور ابتدا به یادآوری مفهوم دستگاه مختصات قائم می‌پردازیم که **دستگاه مختصات دکارتی** نیز نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن یک خط جهت‌دار $\overrightarrow{Ox}$ با یک نقطه‌ی ثابت O روی آن به نام **مبداء** و یک واحد طول روی آن می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی اعداد حقیقی و نقاط خط بر قرار ساخت (شکل ۱–۴).

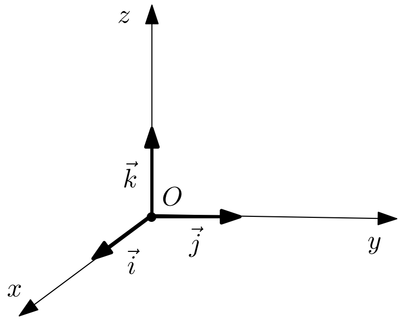


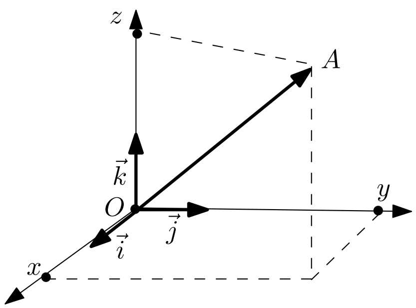


شکل ۱–۴. مختصات دکارتی روی خط. شکل ۱–۵. مختصات دکارتی در صفحه.

به همین ترتیب به‌وسیله‌ی دو خط جهتدار متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ با نقطه مشترک O به نام مبداء و یک واحد طول مشترک روی دو محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین

مجموعه‌ی زوج‌های مرتب $\mathbb{R}^2$ و نقاط صفحه برقرار ساخت. این صفحه را صفحه‌ی دکارتی xy می‌نامیم. بردار به طول واحد $\overrightarrow{OI}$ و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Ox}$ را با $\vec{i}$ (یا بدون نماد بردار و به صورت پررنگ $\mathbf{i}$) و بردار واحد $\overrightarrow{OJ}$ و هم‌جهت با محور $\overrightarrow{Oy}$ را با $\vec{j}$ (یا $\mathbf{j}$) نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۵). به طریق مشابه، به کمک سه خط جهت‌دار و دوبه‌دو متعامد $\overrightarrow{Ox}$ و $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ با نقطه‌ی مشترک O به نام مبداء و یک طول واحد مشترک روی سه محور می‌توان یک تناظر یک‌به‌یک بین مجموعه‌ی سه‌تایی‌های مرتب $\mathbb{R}^3$ و نقاط فضا برقرار ساخت. این فضا را **فضای دکارتی** xyz می‌نامیم. بردارهای به واحد طول $\overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{OJ}$ و $\overrightarrow{OK}$ به‌ترتیب هم‌جهت بامحورهای $\overrightarrow{Ox}$ ، $\overrightarrow{Oy}$ و $\overrightarrow{Oz}$ را به ترتیب با $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ (یا $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$) نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۶).





شکل ۱—۶. دستگاه مختصات دکارتی درفضا. شکل ۱—۷. مولفه‌های بردار در فضا.

به کمک یک دستگاه مختصات دکارتی می‌توان برای بردارهای هندسی در صفحه و فضا نمایش تحلیلی منحصر به فردی به دست آورد. به عبارت دیگر اگر نقطه‌ی ثابت O رامبداء مختصات در نظر بگیریم آنگاه نظیر هر بردار هندسی $\mathbf{a}$ در فضای دکارتی xyz ، سه تایی مرتب و منحصر به فرد $A = (x, y, z)$ وجود دارد به گونه‌ای که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است. با توجه به ویژگی‌های جمع برداری داریم $\mathbf{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. اسکالرهای x و y و z را مولفه‌های بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم (شکل ۱—۷). در حالتی که بردار $\mathbf{a}$ در صفحه دکارتی xy باشد، زوج مرتب منحصر به فرد $A = (x, y)$ وجود دارد به قسمی که $\overrightarrow{OA}$ یک نمایش هندسی $\mathbf{a}$ است. در این حالت نیز $\mathbf{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ و اسکالرهای x و y را مولفه‌های $\mathbf{a}$ می‌نامیم (شکل ۱—۸). قضیه‌ی زیر تناظر طبیعی موجود بین فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (یا فضا) و فضای برداری $\mathbb{R}^2$ (یا $\mathbb{R}^3$) را بیان می‌کند.

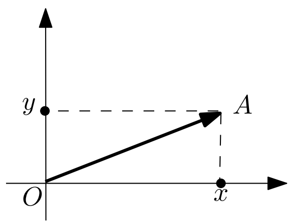
قضیه ۱—۱—۱۶ فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه (فضا) با فضای برداری $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) یکریخت است.

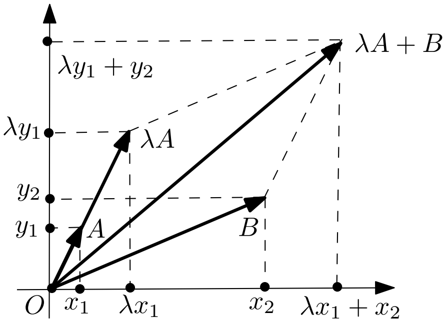
برهان . فرض کنیم V فضای برداری بردارهای هندسی در صفحه باشد. نگاشت

$T : \mathbb{R}^{۲} \to V$ با ضابطه‌ی $A \longmapsto \overrightarrow{OA}$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $\lambda \in \mathbb{R}$، $A = (x_{۱}, y_{۱})$، $B = (x_{۲}, y_{۲})$ و $C = \lambda A + B = (\lambda x_{۱} + x_{۲}, \lambda y_{۱} + y_{۲})$ (شکل ۱—۹). در این صورت

$$
\begin{aligned}
T(\lambda A + B) = T(C) &= \overrightarrow{OC} \\
&= (\lambda x_{۱} + x_{۲})\vec{i} + (\lambda y_{۱} + y_{۲})\vec{j} \\
&= \lambda(x_{۱}\vec{i} + y_{۱}\vec{j}) + (x_{۲}\vec{i} + y_{۲}\vec{j}) \\
&= \lambda\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\
&= \lambda T(A) + T(B)
\end{aligned}
$$

یک‌به‌یک و پوشابودن نگاشت T آشکار است. به همین ترتیب دیده می‌شود که $\mathbb{R}^{۳}$ با فضای برداری بردارهای هندسی در فضا یکریخت است. ■





شکل ۱—۸. مولفه‌ی بردار.   شکل ۱—۹. یکریختی فضاهای بردارهای هندسی و $\mathbb{R}^{۲}$.

از این پس تمایزی بین بردارهای هندسی و نمایش تحلیلی آنها که متناظر با نقاط $\mathbb{R}^{۲}$ ($\mathbb{R}^{۳}$) هستند قایل نمی‌شویم. به عبارت دیگر بردار $\mathbf{a}$ با نمایش هندسی $\overrightarrow{OA}$ را به طور ساده با $\mathbf{a} = (x, y)$ ($\mathbf{a} = (x, y, z)$) نیز نمایش می‌دهیم که در آن $A = (x, y)$ ($A = (x, y, z)$).

تعریف ۱–۱–۱۷ فرض کنیم V یک فضای برداری باشد. تابع با ضابطه $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longmapsto <\mathbf{a}, \mathbf{b}>$ از $V \times V$ به مجموعه‌ی $\mathbb{R}$، اعداد حقیقی را یک **ضرب داخلی یا ضرب عددی** روی V می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}$،

الف) برای هر بردار $\mathbf{a}$ همواره $<\mathbf{a}, \mathbf{a}> \geq ۰$ و $<\mathbf{a}, \mathbf{a}> = ۰$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ب) $<\mathbf{a}, \mathbf{b}> = <\mathbf{b}, \mathbf{a}>$.

ج) $<\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}> = \lambda <\mathbf{a}, \mathbf{c}> + <\mathbf{b}, \mathbf{c}>$.

از ب و ج بلافاصله نتیجه می‌شود

$$< \mathbf{a}, \lambda\mathbf{b}+\mathbf{c} >=< \lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}, \mathbf{a} >= \lambda < \mathbf{b}, \mathbf{a} > + < \mathbf{c}, \mathbf{a} >= \lambda < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + < \mathbf{a}, \mathbf{c} >$$

فضای برداری V همراه با یک ضرب داخلی را یک **فضای ضرب داخلی** می‌نامیم . در این حالت برای بردار $\mathbf{a}$ ، اسکالر نامنفی $||\mathbf{a}|| := \sqrt{< \mathbf{a}, \mathbf{a} >}$ را **نُرم** $\mathbf{a}$ می‌نامیم.

مثال ۱–۱–۱۸ فرض کنیم $V = \mathbb{R}^n$. در این صورت برای $\mathbf{a} = (x_1, \cdots, x_n)$ و $\mathbf{b} = (y_1, \cdots, y_n)$

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^n$ است. این ضرب را با نماد ساده‌تر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ نیز نمایش داده و آن را **ضرب نقطه‌ای** نیز می‌نامیم. به این ترتیب

$$||\mathbf{a}|| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

این نُرم را **نُرم اقلیدسی** بردار $\mathbf{a}$ می‌نامیم.

مثال ۱–۱–۱۹ فرض کنیم $I = [a, b]$ بازه‌ای در $\mathbb{R}$ و $V = C(I, \mathbb{R})$. دراین صورت $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ یک ضرب داخلی روی V است (تحقیق کنید!).

قضیه ۱–۱–۲۰ **(نا مساوی کوشی –شوارتز)** فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار دلخواه $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ ،

$$| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | \leq ||\mathbf{a}||\, ||\mathbf{b}||$$

برهان. برای اسکالر دلخواه $t \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم $\mathbf{x} = \mathbf{a} - t\mathbf{b}$. دراین صورت

$$\begin{aligned}
0 &\leq < \mathbf{x}, \mathbf{x} > \\
&= < \mathbf{a} - t\mathbf{b}, \mathbf{a} - t\mathbf{b} > \\
&= < \mathbf{a}, \mathbf{a} > -2t < \mathbf{a}, \mathbf{b} > +t^2 < \mathbf{b}, \mathbf{b} > \\
&= ||\mathbf{a}||^2 - 2t < \mathbf{a}, \mathbf{b} > +t^2 ||\mathbf{b}||^2
\end{aligned}$$

اگر $||\mathbf{b}|| = \mathbf{0}$ باشد آنگاه $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ و قضیه به وضوح بر قرار است. فرض کنیم $||\mathbf{b}|| \neq ۰$. نامساوی فوق به ازای جمیع مقادیر t برقرار است به ویژه برای $t = \frac{۱}{||\mathbf{b}||} < \mathbf{a}, \mathbf{b} >$، پس

$$\begin{aligned} ۰ &\leq ||\mathbf{a}||^{۲} - \frac{۲}{||\mathbf{b}||} < \mathbf{a}, \mathbf{b} >^{۲} + \frac{۱}{||\mathbf{b}||^{۲}} < \mathbf{a}, \mathbf{b} >^{۲} ||\mathbf{b}|| \\ &= ||\mathbf{a}||^{۲} - \frac{۱}{||\mathbf{b}||^{۲}} < \mathbf{a}, \mathbf{b} >^{۲} \end{aligned}$$

که معادل است با $< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^{۲} \leq ||\mathbf{a}||^{۲} ||\mathbf{b}||^{۲}$. بنابر این $| < \mathbf{a}, \mathbf{b} > | \leq ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}||$. ■

قضیه ۱–۱–۲۱ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت برای هر دو بردار $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ و هر اسکالر $\lambda \in \mathbb{R}$ ،

الف) $||\mathbf{a}|| \geq ۰$ و $||\mathbf{a}|| = ۰$ اگروتنها اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ب) $||\lambda \mathbf{a}|| = |\lambda| ||\mathbf{a}||$.

ج) $||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$.

برهان. الف) و ب) بدیهی هستند. برای اثبات ج)، بنابر تعریف و نامساوی کشی ـشوارتز

$$\begin{aligned} ||\mathbf{a} + \mathbf{b}||^{۲} &= < \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} > \\ &= < \mathbf{a}, \mathbf{a} > + ۲ < \mathbf{a}, \mathbf{b} > + < \mathbf{b}, \mathbf{b} > \\ &\leq ||\mathbf{a}||^{۲} + ۲||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| + ||\mathbf{b}||^{۲} \\ &= (||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||)^{۲} \end{aligned}$$

با جذرگیری از دوطرف نتیجه می‌شود $||\mathbf{a} + \mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$. ■

در فضاهای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ می‌توان ضرب داخلی را به شکل دیگری نیز بیان کرد. برای دو بردار هندسی ناصفر و غیرموازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با نمایش‌های $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ در مثلث $\triangle OAB$ داریم

$$||\overrightarrow{AB}||^{۲} = ||\overrightarrow{OA}||^{۲} + ||\overrightarrow{OB}||^{۲} - ۲||\overrightarrow{OA}|| \, ||\overrightarrow{OB}|| \cos\theta$$

که در آن $۰ < \theta < \pi$ زاویه‌ی بین پاره‌خط‌های OA و OB است (شکل ۱—۱۰). بنابراین

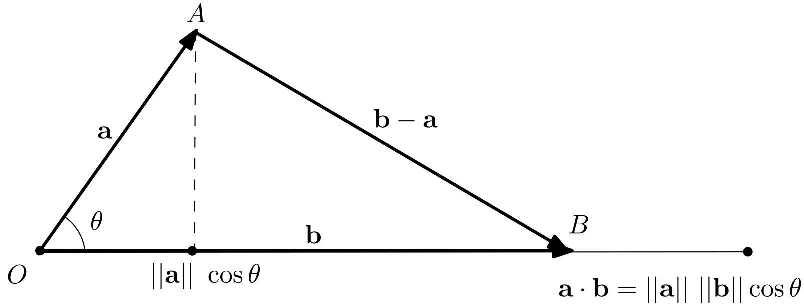
$$||\mathbf{b} - \mathbf{a}||^{۲} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos\theta$$

از این رابطه با توجه به $||\mathbf{b}-\mathbf{a}||^{۲} = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ نتیجه می‌شود

$$||\mathbf{b}||^{۲} + ||\mathbf{a}||^{۲} - ۲\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||^{۲} + ||\mathbf{b}||^{۲} - ۲||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$$

که معادل است با

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\cos\theta$$



شکل ۱—۱۰. تعبیر هندسی ضرب داخلی.

برقراری این رابطه در فضاهای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$ به ما امکان می‌دهد که مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را در فضای $\mathbb{R}^n$ برای بردارهای ناصفر تعریف کنیم. برای بردارهای ناصفر $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ طبق نامساوی کوشی_شوارتز، $-||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}|| \leq \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||$. بنابر این $-۱ \leq \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||} \leq ۱$. به این ترتیب می‌توان مفهوم زاویه‌ی بین دو بردار را به شکل تحلیلی زیر بیان کرد.

$$\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||}\right)$$

تعریف ۱–۱–۲۲ فرض کنیم V یک فضای ضرب داخلی باشد. دو بردار $\mathbf{a},\mathbf{b}\in V$ را **متعامد** می‌نامیم و می‌نویسیم $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$ هرگاه $<\mathbf{a},\mathbf{b}>=۰$.

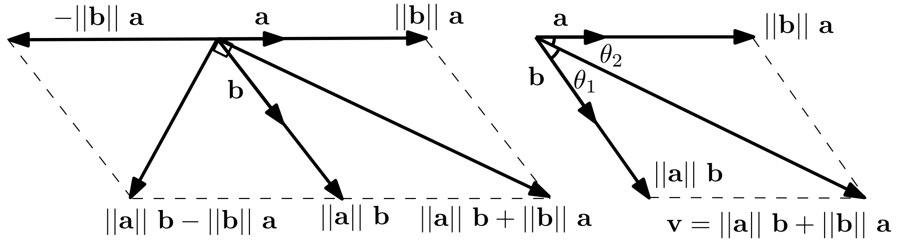
مثال ۱–۱–۲۳ نشان دهید در فضاهای $\mathbb{R}^{۲}$ و $\mathbb{R}^{۳}$، بردار $\mathbf{v} = ||\mathbf{a}||\mathbf{b} + ||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ زاویه‌ی بین بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف می‌کند (شکل ۱—۱۱).

حل. فرض کنیم $\theta_{۱}$ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{v}$ و $\theta_{۲}$ زاویه‌ی بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{b}$ باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}\cos\theta_{۱} &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{\mathbf{a}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||} = \frac{||\mathbf{a}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||^{۲}}{||\mathbf{a}||||\mathbf{v}||}\\ &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||}=\frac{\mathbf{b}\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||}=\frac{||\mathbf{b}||^2||\mathbf{a}||+||\mathbf{b}||\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{b}||||\mathbf{v}||}\\ &= \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{b}||||\mathbf{a}||}{||\mathbf{v}||}\end{aligned}$$

بنابر این $\cos\theta_1=\cos\theta_2$. از سوی دیگر تابع $y=\cos x$ روی بازه‌ی $[0,\pi]$ یک به یک است. پس $\theta_1=\theta_2$.



شکل ۱—۱۱. نیمساز زاویه‌ی بین a و b.   شکل ۱—۱۲. زاویه‌ی بین v و u.

مثال ۱–۱–۲۴ نشان دهید در فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$، بردار های $\mathbf{v}=||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ و $\mathbf{u}=||\mathbf{a}||\mathbf{b}-||\mathbf{b}||\mathbf{a}$ متعامد هستند (شکل ۱—۱۲).

حل.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (||\mathbf{a}||\mathbf{b}-||\mathbf{b}||\mathbf{a})\cdot(||\mathbf{a}||\mathbf{b}+||\mathbf{b}||\mathbf{a})\\ &= ||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+||\mathbf{a}||^2\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-||\mathbf{b}||^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ &= 0\end{aligned}$$

مثال ۱–۱–۲۵ فرض کنیم a و b دو بردار غیر صفر در فضاهای $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ باشند. نشان دهید $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||=||\mathbf{a}-\mathbf{b}||$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$.

حل. از $||\mathbf{a}-\mathbf{b}||\geq 0$ و $||\mathbf{a}+\mathbf{b}||\geq 0$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}||\mathbf{a}+\mathbf{b}||=||\mathbf{a}-\mathbf{b}|| &\Leftrightarrow ||\mathbf{a}+\mathbf{b}||^2=||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2\\ &\Leftrightarrow (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{b})\\ &\Leftrightarrow ||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{b}||^2+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=||\mathbf{a}||^2+||\mathbf{b}||^2-2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0\\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}\perp\mathbf{b}\end{aligned}$$

مثال ۱–۱–۲۶ نشان دهید در فضاهای $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$، بردار $\mathbf{a}$ بر $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^۲}$ عمود است.

حل.

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} &= \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^۲}\ \mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^۲}\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||^۲}\ ||\mathbf{a}||^۲ \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \circ\end{aligned}$$

اکنون فرض کنیم $\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n$ بردارهای غیر صفر و متعامد در $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت $\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n$ مستقل خطی هستند زیرا با فرض $\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ برای $۱ \le i \le n$، $\mathbf{0} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{0} = \mathbf{a}_i\cdot(\lambda_۱\mathbf{a}_۱ + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n) = \lambda_i||\mathbf{a}_i||^۲$. درنتیجه $\lambda_i = \circ$. پس بنابر قضیه‌ی ۱–۱–۱۲ مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_۱, ..., \mathbf{a}_n\}$ یک پایه‌ی $\mathbb{R}^n$ است. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a} = x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n$ نوشت به قسمی که $x_۱, ..., x_n \in \mathbb{R}$. در این صورت

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}_i\cdot(x_۱\mathbf{a}_۱ + ... + x_n\mathbf{a}_n) = x_i||\mathbf{a}_i||^۲$$

درنتیجه $x_i = \frac{\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_i||^۲}$، به عبارت دیگر

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}_۱\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_۱||^۲}\ \mathbf{a}_۱ + ... + \frac{\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_n||^۲}\ \mathbf{a}_n \qquad (۱)$$

در حالت کلی برای بردار غیر صفر $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$، اسکالر $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$ را **مؤلفه‌ی a در راستای b** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Comp_b a}$ نمایش می‌دهیم. همچنین بردار $\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^۲}\ \mathbf{b}$ را **تصویر a در امتداد b** می‌نامیم و با نماد $\mathbf{Proj_b a}$ نمایش می‌دهیم (شکل ۱—۱۳).

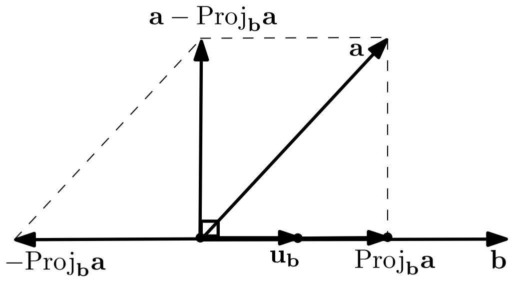
در این صورت $\mathbf{Proj_b a} = (\mathbf{Copm_b a})\mathbf{u_b}$ به قسمی که $\mathbf{u_b} := \frac{\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||}$ بردار یکه‌ی هم‌جهت با $\mathbf{b}$ است. به سادگی تحقیق می‌شود که

$$\mathbf{Proj_b a} \parallel \mathbf{b} \quad , \quad (\mathbf{a} - \mathbf{Proj_b a})\perp\mathbf{b}$$

بنابر این $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت مجموع یک بردار موازی و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه کرد. رابطه‌ی (۱) را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد

$$\mathbf{a} = (\mathbf{Copm_{a_۱} a})\mathbf{u_{a_۱}} + ... + (\mathbf{Copm_{a_n} a})\mathbf{u_{a_n}} = \mathbf{Proj_{a_۱} a} + ... + \mathbf{Proj_{a_n} a} \qquad (۲)$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان به شکل دیگری نیز برای یک فضای ضرب داخلی بیان کرد.



شکل ۱—۱۳. بردارهای $\mathbf{Proj_b a}$ و $(\mathbf{a}-\mathbf{Proj_b a})$.

بر اساس قضیه‌ای به نام قضیه‌ی گرام—اشمیت، اگر V یک فضای ضرب داخلی با بعد باپایان روی $\mathbb{R}$ باشد، همواره می‌توان یک پایه‌ی متعامد یکه‌ی $B=\{\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_n\}$ برای V به دست آورد. بنابر این هر بردار $\mathbf{a}$ را می‌توان به صورت $\mathbf{a}=x_1\mathbf{u}_1+\dots+x_n\mathbf{u}_n$ نوشت به قسمی که $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$، $<\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_j>=0$ (برای $i\neq j$) و $<\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i>=1$. در این صورت با ضرب داخلی دو طرف در $\mathbf{u}_i$،

$$<\mathbf{u}_i,\mathbf{a}>=<\mathbf{u}_i\ ,\ x_1\mathbf{u}_1+\dots+x_n\mathbf{u}_n>=x_i<\mathbf{u}_i,\mathbf{u}_i>=x_i$$

به عبارت دیگر

$$\mathbf{a}=<\mathbf{u}_1,\mathbf{a}>\mathbf{u}_1+\dots+<\mathbf{u}_n,\mathbf{a}>\mathbf{u}_n \qquad (3)$$

مثال ۱–۱–۲۷ بردارهای $\mathbf{a}_1=(1,1,0)$ ، $\mathbf{a}_2=(1,-1,1)$ و $\mathbf{a}_3=(-1,1,2)$ را در $\mathbb{R}^3$ در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید مجموعه‌ی $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ تشکیل یک پایه‌ی متعامد برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

ب) بردار $\mathbf{a}=(1,1,1)$ را به صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه‌ی $\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$ بیان کنید.

ج) به ازای $\mathbf{b}=(1,2,3)$، بردار $\mathbf{a}$ را به صورت مجموع یک بردار موازی و یک بردار عمود بر $\mathbf{b}$ تجزیه کنید.

حل. الف) به سادگی تحقیق می‌شود که بردارهای $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ دو به دو متعامد هستند و در نتیجه تشکیل یک پایه برای $\mathbb{R}^3$ می‌دهند.

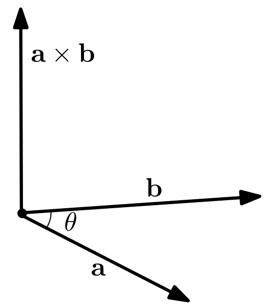
ب) بنا بر رابطه‌ی (۱)

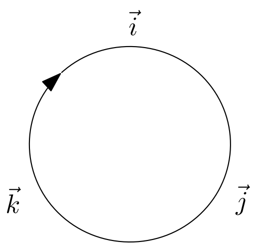
$$\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_1||^2}\ \mathbf{a}_1+\frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_2||^2}\ \mathbf{a}_2+\frac{\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{a}}{||\mathbf{a}_2||^2}\ \mathbf{a}_2=\frac{2}{2}\mathbf{a}_1+\frac{1}{3}\mathbf{a}_2+\frac{2}{6}\mathbf{a}_3$$

ج) بنا به تعریف

$$\mathbf{Proj_b\ a}=(\mathbf{Copm_b\ a})\ \mathbf{u_b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{b}||^2}\ \mathbf{b}=\frac{6}{14}\mathbf{b}=(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{9}{7})$$

بنابر این $\mathbf{a}=(\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{9}{7})+(\frac{4}{7},\frac{1}{7},-\frac{2}{7})$ در ادامه‌ی بحث مفهوم ضرب خارجی بردارها و مفاهیم وابسته را در $\mathbb{R}^3$ مطرح می‌کنیم. از جنبه‌ی تاریخی برای نخستین بار، ضرب خارجی دو بردار برای بیان مفاهیمی مانند گشتاور و میدان مغناطیسی حاصل از یک ذره‌ی متحرک باردار به صورت ضرب دو بردار دیگر مطرح شد. در فیزیک حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ به قسمی که $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ طبق قانون دست راست، یک دستگاه راست‌گرد تشکیل می‌دهد و اندازه‌ی $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برابر $||\mathbf{a}||\ ||\mathbf{b}||\sin\theta$ است که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است (شکل ۱—۱۴).





شکل ۱—۱۴. ضرب خارجی. **شکل ۱—۱۵.** $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ ،$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

به کمک ویژگی‌های هندسی می‌توان ثابت کرد که تعریف فوق با تعریف بعدی معادل است.

تعریف ۱–۱–۲۸ برای دو بردار $\mathbf{a}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{b}=(y_1,y_2,y_3)$ در فضای $\mathbb{R}^3$ حاصل ضرب خارجی بردار $\mathbf{a}$ در بردار $\mathbf{b}$ که با $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}:=(x_2y_3-x_3y_2)\vec{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}$$

از این پس برای سهولت در محاسبات، از تعریف ۱–۱–۲۸ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱–۱–۲۹ برای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ در $\mathbb{R}^3$، $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ و $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ و $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

اگر بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ را به ترتیب روی یک دایره قرار دهیم حاصل ضرب خارجی دو بردار متوالی، بردار سوم است (شکل ۱–۱۵). در واقع به همین دلیل $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ یک دستگاه **راست گرد** $\mathbb{R}^3$ است. با توجه به تعریف دترمینان برای اسکالرهای x_i, y_i, z_i به ازای $i=1,2,3$،

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} := x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

به قسمی که $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad-bc$. با این سهو که درایه‌های دترمینان می‌توانند بردار هم باشند، برای سادگی، حاصل ضرب خارجی دو بردار $\mathbf{a}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{b}=(y_1,y_2,y_3)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

در قضیه‌ی بعد رابطه‌ی بین ویژگی‌های هندسی و تحلیلی ضرب خارجی و رابطه‌ی آن با ضرب داخلی بررسی می‌شود.

قضیه ۱–۱–۳۰ برای سه بردار دلخواه $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ و اسکالرهای دلخواه λ,μ،

الف) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$.

ب) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$.

ج) $(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

د) $||\mathbf{a}\times\mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||||\mathbf{b}||\sin\theta$، به قسمی که θ زاویه‌ی بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است.

ه) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$ اگر و تنها اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ وابسته‌ی خطی باشند.

و) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

اثبات. ویژگی‌های الف) تا ج) به سادگی از محاسبه‌ی دو طرف تساوی به دست می‌آید. اثبات د) به صورت زیر است. برای $\mathbf{a}=(x_1,x_2,x_3)$ و $\mathbf{b}=(y_1,y_2,y_3)$،

$$||a\times b||^2 = (x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$$

$$\begin{aligned}
&= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 - (a\cdot b)^2 \\
&= \|a\|^2\|b\|^2 - \|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta \\
&= \|a\|^2\|b\|^2(1-\cos^2\theta) \\
&= \|a\|^2\|b\|^2\sin^2\theta
\end{aligned}$$

از $0 \le \theta \le \pi$ نتیجه می‌شود $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta$.

برای اثبات قسمت و) به سادگی دیده می‌شود که برای $\mathbf{a} = (x_1, x_2, x_3)$، $\mathbf{b} = (y_1, y_2, y_3)$ و $\mathbf{c} = (z_1, z_2, z_3)$،

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}$$

اگر $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{c}$، دو سطر دترمینان برابر می‌شود و در نتیجه حاصل دترمینان صفر خواهد بود.

برای دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نظیر بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ که زاویه‌ی بین راستای آنها θ باشد بردار $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ برداری است عمود بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ با اندازه‌ی $\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta$. در حالت خاص اگر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یکه و متعامد باشند

الف) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a} = \mathbf{b}$

ب) $\mathbf{b}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}$

پس در این حالت $\{\mathbf{a},\ \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ یک پایه‌ی یکه، متعامد و راست‌گرد برای $\mathbb{R}^3$ است.

ارتفاع مثلث $\triangle OAB$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\|\sin\theta$ (شکل ۱−۱۶). بنابر این مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ عبارت است از $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\sin\theta$. به ویژه برای بردارهای $\mathbf{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$ و $\mathbf{b} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j}$،

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

به این ترتیب $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$. به عبارت دیگر تعبیر هندسی $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$، مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته شده بر اضلاع $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ است.

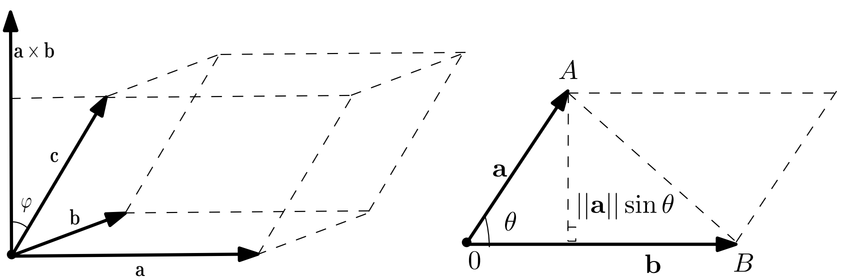
به همین ترتیب برای بردارهای $\mathbf{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$، $\mathbf{b} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ و $\mathbf{c} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$،

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

از سوی دیگر

۱) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos\varphi$ که φ زاویه‌ی بین بردارهای $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ است.

۲) حجم متوازی‌السطوح واقع بر بردارهای $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ عبارت‌است از $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos\varphi$ (شکل ۱—۱۷).



شکل ۱—۱۶. متوازی‌الاضلاع بر $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$. شکل ۱—۱۷. متوازی‌السطوح بر $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$.

به این ترتیب $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos\varphi$ برابر است با قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$. به عبارت دیگر تعبیر هندسی قدرمطلق $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$، حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای $\mathbf{a} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$، $\mathbf{b} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$ و $\mathbf{c} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ است.

یکی دیگر از مفاهیم کاربردی مهم، مفهوم ضرب سه‌گانه‌ی بردارها در فضای $\mathbb{R}^3$ می‌باشد. برای سه بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در فضای $\mathbb{R}^3$، اسکالر $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] := \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ را ضرب سه‌گان بردارهای $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ می‌نامیم. با استفاده از ویژگی‌های دترمینان،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

مثال ۱–۱–۳۱ برای چهار بردار $\mathbf{d},\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ نشان دهید که همواره
$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$

حل. برای بردارهای $\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}$ داریم $[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}]=[\mathbf{v},\mathbf{w},\mathbf{u}]=[\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}]$. بنابر این

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= [\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ,\mathbf{c},\mathbf{d}]\\ &= [\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ ,\mathbf{d}]\\ &= \mathbf{c}\cdot((\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\ \mathbf{a}-(\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})\ \mathbf{b})\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\end{aligned}$$

فرض کنیم سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ بردارهایی با رأس مشترک O در فضا و T متوازی‌السطوح ساخته شده بر این سه بردار باشد. در این صورت بنابر آنچه بیان کردیم

$$T\ \text{حجم} = |\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})| = |\ [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]\ | = |\ [\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\ |$$

نتیجه: سه بردار $\mathbf{a}$، $\mathbf{b}$ و $\mathbf{c}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ هم صفحه هستند اگر و تنها اگر $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=۰$.

کاربرد روش برداری در حل برخی از مسائل هندسی

مثال ۱–۱–۳۲ دو بردار غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ نظیر بردارهای مکان $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ را در نظر می‌گیریم.

الف) فرض کنیم بردار $\mathbf{c}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OC}$ و L خط واقع بر دو نقطه‌ی A و B باشد. نشان دهید $C\in L$ اگر و تنها اگر به ازای یک $\lambda\in\mathbb{R}$، $\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+(۱-\lambda)\mathbf{b}$.

ب) با استفاده از قسمت الف) نشان دهید به ازای هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه اسکالرهای $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ وجود دارند به قسمی که $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$. به عبارت دیگر هر بردار دلخواه $\mathbf{c}$ در صفحه یک ترکیب خطی از دو بردار $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ است. به این ترتیب دو بردار ناصفر و غیر موازی $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ یک پایه برای $\mathbb{R}^۲$ هستند.

حل. الف) از $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ و $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}-\mathbf{c}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}C\in L &\Leftrightarrow \overrightarrow{CA}||\overrightarrow{AB}\\ &\Leftrightarrow \mathbf{a}-\mathbf{c}\ ||\ \mathbf{b}-\mathbf{a}\\ &\Leftrightarrow \exists\mu\in\mathbb{R}\quad \mathbf{a}-\mathbf{c}=\mu(\mathbf{b}-\mathbf{a})\\ &\Leftrightarrow \mathbf{c}=(۱+\mu)\mathbf{a}-\mu\mathbf{b}\end{aligned}$$

پس به ازای $\lambda = ۱ + \mu$،

$$C \in L \quad \Leftrightarrow \quad c = \lambda a + (۱ - \lambda) b$$

ب) دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱) امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L موازی است. در این صورت $\mathbf{c} \parallel \mathbf{b} - \mathbf{a}$ و درنتیجه به ازای یک $\lambda \in \mathbb{R}$ داریم $\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (-\lambda)\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$.

۲) امتداد بردار c خط L را قطع می‌کند. فرض کنیم C' محل برخورد امتداد بردار $\mathbf{c}$ با خط L باشد. در این صورت بنا بر قسمت قبل به ازای یک $\mu \in \mathbb{R}$ داریم $\overrightarrow{OC'} = \mu \mathbf{a} + (۱ - \mu)\mathbf{b}$. به این ترتیب

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} \parallel \overrightarrow{OC'} \quad &\Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \mathbf{c} = \lambda\, \overrightarrow{OC'} \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{c} = \lambda(\mu \mathbf{a} + (۱ - \mu)\mathbf{b}) \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{c} = (\lambda\mu)\mathbf{a} + (\lambda - \lambda\mu)\mathbf{b}
\end{aligned}$$

پس به ازای $\alpha = \lambda\mu$ و $\beta = \lambda - \lambda\mu$ داریم $\mathbf{c} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$.

مثال ۱–۱–۳۳ با استفاده از روش برداری ثابت کنید

الف) در هر مثلث، سه میانه همرسند و دو میانه یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ می‌برند.

ب) در هر مثلث، سه ارتفاع همرسند.

ج) در هر متوازی‌الاضلاع ، قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.

د) در هر لوزی ، قطرها بر یکدیگر عمودند.

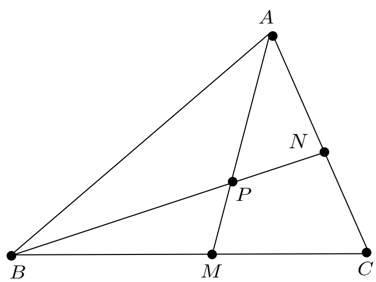
ه) در هر دایره ، زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

حل. الف) فرض کنیم در مثلث $\triangle ABC$ نقطه‌ی P محل تلاقی میانه‌های AM و BN باشد (شکل ۱—۱۸). ابتدا نشان می‌دهیم P میانه‌ی AM را به نسبت ۲ به ۱ می‌برد. از این که M وسط BC و N وسط AC است نتیجه می‌شود $\frac{CM}{CB} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{CN}{CA} = \frac{۱}{۲}$. بنابر مثال قبل داریم $\overrightarrow{NM} = \frac{۱}{۲}\overrightarrow{AB}$ که معادل است با $\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB})$. ازسوی دیگر $\overrightarrow{AP} \| \overrightarrow{PM}$، پس به ازای $\alpha \in \mathbb{R}$، $\overrightarrow{AP} = \alpha \overrightarrow{PM}$. به همین ترتیب $\overrightarrow{BP} \| \overrightarrow{NP}$،یعنی به ازای $\beta \in \mathbb{R}$، $\overrightarrow{PB} = \beta \overrightarrow{NP}$. پس $۲\overrightarrow{NP} + ۲\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \alpha \overrightarrow{PM} + \beta \overrightarrow{NP}$ که

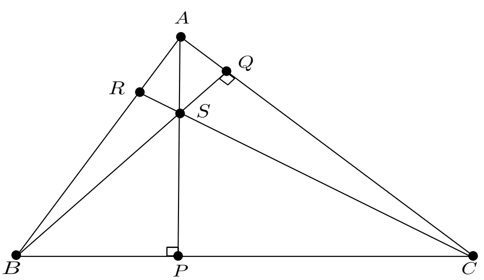
معادل است با $(\alpha - ۲)\overrightarrow{PM} + (\beta - ۲)\overrightarrow{NP} = ۰$. اما از $\overrightarrow{PM} \nparallel \overrightarrow{NP}$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{PM}$ مستقل خطی هستند. بنابر این $\alpha = ۲$ و $\beta = ۲$. به این ترتیب $\overrightarrow{AP} = ۲\overrightarrow{PM}$. با استدلالی مشابه دیده می‌شود که اگر P' محل تلاقی AM با میانه‌ی سوم باشد داریم $\overrightarrow{AP'} = ۲\overrightarrow{P'M}$. در نتیجه باید $P = P'$ باشد.

ب) فرض کنیم AP و BQ دو ارتفاع مثلث $\triangle ABC$ و S محل تلاقی آنها باشد. باید ثابت کنیم CS بر AB عمود است یعنی $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} = ۰$. در این صورت اگر CS قاعده‌ی AB را در R ببرد، CR ارتفاع سوم است (شکل ۱—۱۹). از این که AP و BQ ارتفاع‌های مثلث هستند نتیجه می‌شود $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = ۰$ و $\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} = ۰$. بنابر این

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{CS} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\
&= \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AS}) \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{CB} \\
&= -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + ۰ + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + ۰ = ۰
\end{aligned}$$



شکل ۱—۱۸.



شکل ۱—۱۹.

ج) فرض کنیم در متوازی‌الاضلاع $\square OACB$ که O مبدأ مختصات در نظر گرفته شده است ، P محل تلاقی قطرها (شکل ۱—۲۰) ، $\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{AP} = \mu\overrightarrow{AB}$ باشد. در این صورت می‌توان بردار $\overrightarrow{OP}$ را به دو شکل زیر بیان کرد.

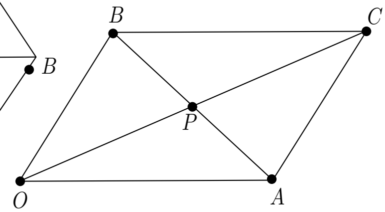
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \mu(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (۱ - \mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$$

پس $\lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB} = (۱ - \mu)\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$، یعنی $(\lambda + \mu - ۱)\overrightarrow{OA} + (\lambda - \mu)\overrightarrow{OB} = ۰$. از این که بردارهای $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ ناموازی هستند نتیجه می‌شود که مستقل خطی‌اند.

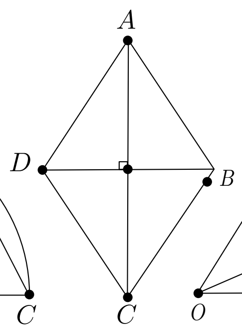
پس $\lambda + \mu - 1 = \lambda - \mu = 0$، یعنی $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$. به این ترتیب $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

د) لوزی $\lozenge ABCD$ را در نظر می‌گیریم. در هر لوزی طول همه‌ی اضلاع برابر و اضلاع روبه‌رو موازی هستند (شکل ۱—۲۱). بنابر این

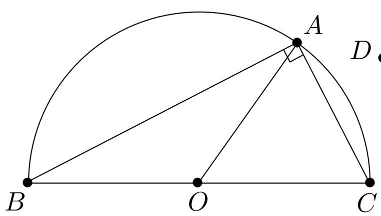
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} \\
&= \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{DA}\|^2 = 0
\end{aligned}$$



شکل ۱—۲۰.



شکل ۱—۲۱.



شکل ۱—۲۲.

ه) فرض کنیم BC قطری از یک دایره به مرکز O و A نقطه ای بر کمان BC باشد (شکل ۱—۲۲). از $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OB}$ و $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = \|\overrightarrow{OB}\|$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\
&= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= -\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA} \\
&= -\|\overrightarrow{OB}\|^2 + \|\overrightarrow{OA}\|^2 = 0
\end{aligned}$$

مثال ۱–۱–۳۴ چهار نقطه‌ی متمایز $A = (0, 0, 4)$، $B = (0, 1, 2)$، $C = (1, 0, 3)$ و $D = (2, 1, 0)$ را در نظر می‌گیریم.

الف) نشان دهید چهار نقطه‌ی فوق در یک صفحه قرار دارند.

ب) مساحت چهارضلعی $\square ABCD$ را به دست آورید.

ج) مساحت مثلث $\triangle A'B'C'$، تصویر مثلث $\triangle ABC$ بر صفحه‌ی xoz را به دست آورید.

حل. الف) حاصل‌ضرب $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}$ برابر صفر است اگر و تنها اگر سه بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ در یک صفحه واقع باشند. بنابر فرض $\overrightarrow{AD}=۲\vec{i}+\vec{j}-۴\vec{k}$، $\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}$ و $\overrightarrow{AB}=\vec{j}+۲\vec{k}$. پس

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۰ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۱ & -۴\end{pmatrix}=-۲\vec{i}-۴\vec{j}-۲\vec{k}$$

در نتیجه $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AC}=-۲+۲=۰$ و این معادل است با $[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}]=۰$. بنابر این سه بردار فوق در یک صفحه قرار دارند. پس چهار نقطه‌ی D,C,B,A نیز در همان صفحه هستند.

ب) $\square\ ABCD$ مساحت چهارضلعی $=\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\|=\|-۲\vec{i}-۴\vec{j}-۲\vec{k}\|=۲\sqrt{۶}$.

ج) از $C'=(۱,۰,۳)$، $B'=(۰,۰,۲)$ و $A'=(۰,۰,۴)$ نتیجه می‌شود $\overrightarrow{A'C'}=\vec{i}-\vec{k}$, $\overrightarrow{A'B'}=-۲\vec{k}$. پس $\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}=-۲\vec{k}\times(\vec{i}-\vec{k})=-۲\vec{j}$ و

$$\triangle A'B'C' \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}\|\overrightarrow{A'B'}\times\overrightarrow{A'C'}\|=۱$$

مثال ۱–۱–۳۵ فرض کنید A و B و C سه نقطه‌ی ناهم‌خط واقع در یک صفحه‌ی π و $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ بردارهای مکان نظیر سه نقطه باشند. برای بردار دلخواه $\mathbf{d}$ نظیر بردار مکان $\overrightarrow{OD}$ نشان دهید

$$\mathbf{d}\in\pi \ \Leftrightarrow\ \exists\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\ \ \mathbf{d}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}\ ,\ \ \alpha+\beta+\gamma=۱$$

حل. فرض کنیم $\mathbf{d}\in\pi$. در این صورت

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\not\parallel\overrightarrow{AC}\quad&\Rightarrow\quad\exists\ \beta,\gamma\in\mathbb{R}:\overrightarrow{AD}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}\\&\Rightarrow\quad\mathbf{d}-\mathbf{a}=\beta(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{c}-\mathbf{a})\\&\Rightarrow\quad\mathbf{d}=(۱-\beta-\gamma)\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}\end{aligned}$$

به این ترتیب به ازای $\alpha = ۱ - \beta - \gamma$ و β و γ داریم $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$.

به عکس فرض کنیم برای اسکالرهای α و β و γ داشته باشیم $\alpha + \beta + \gamma = ۱$ و $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$. در این صورت

$\mathbf{d} \in \pi \Leftrightarrow$ سه بردار $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AD}$ هم‌صفحه‌اند

$\Leftrightarrow$ چهار نقطه‌ی A، B، C و D هم‌صفحه‌اند

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}-\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] + [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = ۰\\
&\Leftrightarrow [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = ۰
\end{aligned}
$$

اما از $\alpha + \beta + \gamma = ۱ \;,\; d = \alpha a + \beta b + \gamma c$. نتیجه می‌شود

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] - [\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] &= \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] + \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - \beta[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] -\\
&\quad \gamma[\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]\\
&= \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - (-\beta)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] -\\
&\quad (-\gamma)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] - [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}]\\
&= (\alpha + \beta + \gamma - ۱)[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = ۰
\end{aligned}
$$

۱ـ۲ خط و صفحه

در پایان این فصل به یادآوری مفهوم تحلیلی خط و صفحه می‌پردازیم. به ازای نقطه‌ی $P_۰ = (x_۰, y_۰, z_۰)$ و بردار $\mathbf{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ یک و تنها یک خط L وجود دارد به قسمی که $P_۰ \in L$ و $L || \mathbf{v}$ (شکل ۱ـ۲۳). در این صورت برای $P = (x, y, z)$،

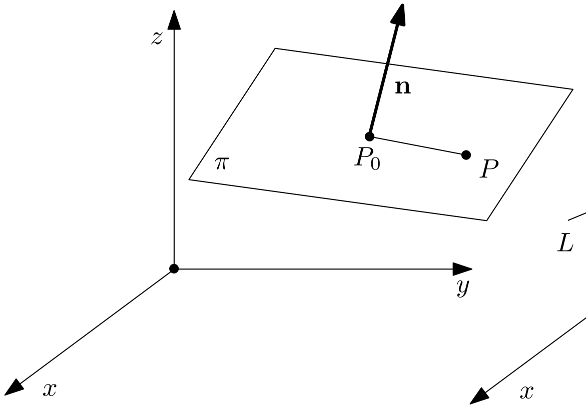
$$
\begin{aligned}
P \in L \;&\Leftrightarrow\; \overrightarrow{P_۰P} \;||\; v\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, t \in \mathbb{R} \;:\; \overrightarrow{P_۰P} = tv\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, t \in \mathbb{R} \;:\; (x - x_۰)\vec{i} + (y - y_۰)\vec{j} + (z - z_۰)\vec{k} = ta\,\vec{i} + tb\,\vec{j} + tc\,\vec{k}\\
&\Leftrightarrow\; \exists\, t \in \mathbb{R} \;:\; x = at + x_۰ \;,\; y = bt + y_۰ \;,\; z = ct + z_۰
\end{aligned}
$$

معادلات فوق ، **معادلات پارامتری خط** L نامیده می‌شوند. اسکالر $t \in \mathbb{R}$ را **پارامتر خط** و بردار $\mathbf{v}$ را یک **بردار هادی** برای خط L می‌نامیم. معادلات پارامتری یک خط منحصربه‌فرد نیستند. معادلات پارامتری را می‌توان با هم ادغام و به شکل زیر بیان کرد.

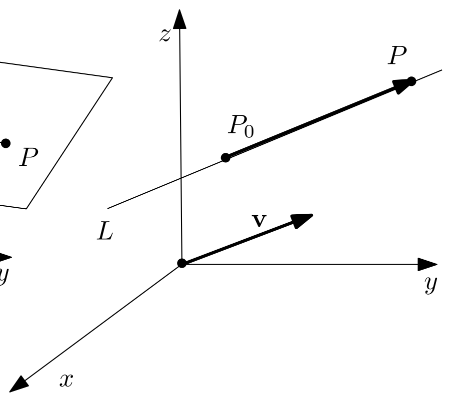
$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c}$$

این معادلات را **معادلات تقارنی** خط می‌نامند. مقادیر c, b, a را **پارامترهای هادی خط** می‌نامند. اگر یکی از این پارامترها عدد ۰ باشد مثلاً اگر $c=\circ$، معادلات تقارنی به شکل زیر بیان می‌شوند.

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b} \quad , \quad z=z_\circ$$



شکل ۱—۲۴.



شکل ۱—۲۳.

همچنین یک و تنها یک صفحه وجود دارد که حاوی نقطه $P_\circ$ و بر امتداد بردار $\mathbf{n}$ عمود است (شکل ۱—۲۴). در این صورت برای $P=(x,y,z)$،

$$\begin{aligned} P\in\pi \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P}\perp\mathbf{n} \\ &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{P_\circ P}\cdot\mathbf{n}=\circ \\ &\Leftrightarrow \quad a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)+c(z-z_\circ)=\circ \end{aligned}$$

معادله‌ی فوق که آن را به صورت $ax+by+cz+d=\circ$ نیز بیان می‌کنیم **معادله‌ی دکارتی صفحه‌ی** π نامیده می‌شود. بردار $\mathbf{n}$، **بردار نرمال یا قائم** صفحه نامیده می‌شود.

مثال ۱-۲-۱ خطوط $L_۱ : \begin{cases} x = t - ۱ \\ y = ۲t + ۲ \\ z = -t \end{cases}$ و $L_۲ : \begin{cases} x = ۲t + ۳ \\ y = -t \\ z = t + ۲ \end{cases}$ مفروض هستند.

الف) نشان دهید $L_۱$ و $L_۲$ متقاطع هستند.

ب) معادله‌ی صفحه‌ی π شامل مبدأ و موازی با دو خط فوق را بیابید.

ج) تصویر قائم خط $L_۱$ را بر صفحه‌ی π تعیین کنید.

د) فاصله‌ی خط $L_۱$ را از صفحه‌ی π به دست آورید.

ه) قرینه‌ی خط $L_۲$ را نسبت به صفحه‌ی π به دست آورید.

و) معادله‌ی نیمساز دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را معین کنید.

حل. الف) بردارهای $\mathbf{v}_۱ = \vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$ و $\mathbf{v}_۲ = ۲\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ مستقل خطی‌اند پس بردارهای هادی دو خط موازی نیستند. به این ترتیب $L_۱ \nparallel L_۲$.

اگر $L_۱$ و $L_۲$ متنافر باشند آنگاه هم صفحه نیستند. در نتیجه به ازای نقاط $P_۱$ و $P_۲$ که به ترتیب بر $L_۱$ و $L_۲$ واقعند ، سه بردار $\mathbf{v}_۱$ و $\mathbf{v}_۲$ و $\overrightarrow{P_۱P_۲}$ غیر هم صفحه هستند. به سادگی تحقیق می‌شود $[\overrightarrow{P_۱P_۲}, \mathbf{v}_۱, \mathbf{v}_۲] = ۰$. پس $L_۱$ و $L_۲$ هم صفحه هستند.

ب) فرض کنید π صفحه‌ی مورد نظر باشد. در این صورت طبق فرض $\mathbf{0} = (۰, ۰, ۰) \in \pi$ و

$$\mathbf{v}_۱ \times \mathbf{v}_۱ = \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۱ \end{pmatrix} = \vec{i} - ۳\vec{j} - ۵\vec{k}$$

بنابر این معادله‌ی π به شکل $۱(x - ۰) - ۳(y - ۰) - ۵(z - ۰) = ۰$ است که معادل است با $x - ۳y - ۵z = ۰$.

ج) فرض کنیم $P'_۱$ تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_۱ \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت $L'_۱$ تصویر قائم خط $L_۱$ بر صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می آید.

$$\overrightarrow{P'_۱P_۱} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱} \Rightarrow \overrightarrow{OP'_۱} = \overrightarrow{OP_۱} - \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱}$$

$$\overrightarrow{OP_۱} = (t - ۱)\vec{i} + (۲t + ۲)\vec{j} - t\vec{k} \quad , \quad \mathbf{n} = \vec{i} - ۳\vec{j} - ۵\vec{k}$$

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP_۱} = \frac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP_۱}}{\|\mathbf{n}\|^۲}\,\mathbf{n} = \frac{t-۱-۶t-۶+۵t}{۳۵}(\vec{i} - ۳\vec{j} - ۵\vec{k}) = -\frac{۱}{۵}(\vec{i} - ۳\vec{j} - ۵\vec{k})$$

$$\overrightarrow{OP'_1} = (t-1)\vec{i}+(2t+2)\vec{j}-t\vec{k}-\frac{1}{5}(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}) = (t-\frac{4}{5})\vec{i}+(2t+\frac{7}{5})\vec{j}-(t+1)\vec{k}$$

معادله‌ی پارامتری خط عبارت است از $x = t - \frac{4}{5} \ , \ y = 2t + \frac{7}{5} \ , \ z = -t - 1$.

د) در این قسمت نیز فرض کنیم P'_1 تصویر قائم نقطه‌ی دلخواه $P_1 \in L$ بر صفحه‌ی π باشد. در این صورت فاصله‌ی خط L با صفحه‌ی π به شکل زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} d(L,\pi) &= d(P_1,\pi) = \|\overrightarrow{P'_1P_1}\| = \text{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{OP} = \|\frac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{OP_1}}{\|\mathbf{n}\|^2}\ \mathbf{n}\| \\ &= \|-\frac{1}{5}(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})\| = \frac{\sqrt{35}}{5} \end{aligned}$$

ه) فرض کنیم L'_2 قرینه‌ی خط L_2 نسبت به صفحه‌ی π ، $P_2 \in L_2$ ، $P_1 \in \pi$ تصویر قائم نقطه‌ی P_2 بر صفحه‌ی π و P'_2 قرینه‌ی نقطه‌ی P_2 نسبت به صفحه‌ی π باشد. در این صورت

$$\overrightarrow{P_2O} = -(2t+3)\vec{i}+t\vec{j}+-(t+2)\vec{k} \qquad , \qquad \mathbf{n} = \vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \text{Proj}_{\mathbf{n}}\overrightarrow{P_2O} = \frac{-2t-3-3t+5t+10}{35}(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$\overrightarrow{P_2P_1} = \frac{1}{5}(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}) \qquad , \qquad \overrightarrow{P_2P'_2} = 2\overrightarrow{P_2P_1} = \frac{2}{5}(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$\overrightarrow{OP'_2} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P'_2} = (2t+\frac{17}{5})\vec{i}-(t+\frac{6}{5})\vec{j}+t\vec{k}$$

بنابر این معادلات پارامتری خط L'_2 به شکل زیر است.

$$x = 2t+\frac{17}{5} \ , \ y = -t-\frac{6}{5} \ , \ z = t$$

و) فرض کنیم P نقطه‌ی تلاقی دو خط L_1 و L_2 باشد. اگر t_1 پارامتر خط L_1 و t_2 پارامتر خط L_2 باشد آنگاه مختصات نقطه‌ی P در دستگاه زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} t_1 - 1 = 2t_2 + 3 \\ 2t_1 + 2 = -t_2 \\ -t_1 = t_2 + 2 \end{cases}$$

پس $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ و در نتیجه $P = (-1, 2, 0)$. از سوی دیگر بردارهای هادی دو خط عبارتند از $\mathbf{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ و $\mathbf{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. طبق مثال ۱–۱–۱۱ بردار $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_2 + \|\mathbf{v}_1\|\mathbf{v}_2$ در راستای نیمساز دو خط است. پس $\mathbf{v} = \sqrt{6}(3\vec{j} + \vec{k}) \parallel 3\vec{j} + \vec{k} \parallel L'_1$. بنابر این معادلات پارامتری خط L'_1 به شکل زیر است.

$$x = 3t - 1 \ , \ y = t + 2 \ , \ z = 0$$