پاسخ نامه آزمون میانترم ریاضی 1 عمومی (بهار ۱۳۹۷)

صفحه 1

سؤال اول: دامنه تابع $\frac{1}{\sqrt{[x-5]}}$ را مشخص کنید.

پاسخ:

۰/۵ نمره $\{x \in \mathbb{R} \mid [x-5]>0\} = [6,+\infty)$

۰/۵ نمره زیرا می‌دانیم $[u]>0 \iff u \geq 1$، در این حالت $u=x-5$ بنابراین $x\geq 6$

سؤال دوم: مطلوبست تعیین علامت تابع $f(x) = \frac{|x-1|}{|x+2|-|3x-5|}$

۰/۷ نمره پاسخ: چون قدر مطلق هر عبارتی، مقداری نامنفی است لذا $|x-1|\geq 0$ پس علامت $f(x)$ همان علامت مخرج کسری باشد. اگر $g(x)=|x+2|-|3x-5|$ داریم

$$g(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=3x-5 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \\ x+2=5-3x \Rightarrow x=\frac{3}{4} \end{cases}$$

۰/۶ نمره حال چون $g(x)$ یک تابع پیوسته است و فقط همین دو ریشه را دارد، لذا بین دو ریشه تغییر علامت نمی‌دهد (در غیر این صورت مجدداً ریشه سومی پیدا می‌کند، که چنین نیست) بنابراین برای تعیین علامت کافی است مقدار تابع را به ازای اعدادی بین دو ریشه و خارج از آنها محاسبه کنیم.

۰/۷ نمره $g(1)=3-2>0$ و $g(4)=6-7=-1<0$ و $g(0)=2-5=-3<0$

جواب:

x	0		$\frac{3}{4}$		1		$\frac{7}{2}$		4
$f(x)$	$-$		$\nexists$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$-$	

سؤال سوم: الف)

۰/۵ نمره $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{5}{x}+4}\right)}{x} - \frac{3}{x}$$

۰/۵ نمره $$= \lim\left[\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{9}{x^2}+\frac{5}{x}+4} - \frac{3}{x}\right] = -\sqrt{4}-0 = -2$$

زیرا $|x|=-x$ برای $x<0$

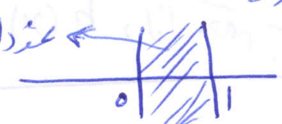
ب)

۰/۵ نمره $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{[x]} =$ موجود نیست

زیرا در ناحیه $0<x<1$ داریم $[x]=0$ ، $\sin x>0$

۰/۵ نمره لذا تابع $\frac{\sin x}{[x]}$ در فاصله بین 0 تا 1 تعریف نشده است، هرچند لازم نیست تابع در $x=0$ تعریف شده باشد ولی در یک فاصله $0<x<r$ لازم است که تعریف شده باشد.

مقداری از تابع نیست



پاسخ نامه آزمون میانترم ریاضی عمومی (۱) بهار ۱۳۹۲

صفحه ۲

سوال چهارم: نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع $h(x)=(x+2)^3(2x+1)$ را مشخص کنید.

۵ نمره

پاسخ: $h'(x)=3(x+2)^2(2x+1)+2(x+3)^3=(x+2)[3(2x+1)+2(x+2)]$

$=(x+2)^2(8x+7)$

۷ نمره

لذا ریشه‌های مشتق عبارتند از $x=-2$ و $x=-\frac{7}{8}$. چون $(x+2)^2\geq 0$ لذا علامت مشتق وابسته $(8x+7)$ است بنابراین داریم

۸ نمره

x		-2		$-\frac{7}{8}$	
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	min	↗

در نواحی که مشتق مثبت است (یا منفی) تابع صعودی (یا نزولی) است طبق قضیه. لذا فقط در $x=-\frac{7}{8}$ مینیمم نسبی دارد

سوال پنجم: سری مک‌لوران تابع $f(x)=\frac{1}{2+x}$ را بنویسید.

۷ نمره

پاسخ: سری مک‌لوران تابع $y=f(x)$ برابر $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ است که در آن $f(0)=a_0$ ، $f'(0)=a_1$ ، $\ldots$ ، $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. لذا

۷ نمره

$f(x)=(2+x)^{-1}\longrightarrow f(0)=\frac{1}{2}=a_0$ ، $f'(x)=-(2+x)^{-2}\longrightarrow f'(0)=-\frac{1}{4}=a_1$

$f''(x)=2(2+x)^{-3}\longrightarrow f''(0)=\frac{2}{2^3}\longrightarrow \frac{f''(0)}{2!}=\frac{1}{8}=a_2\ ,\ \ldots$

۶ نمره

$f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,(2+x)^{-(n+1)}\longrightarrow a_n=\frac{(-1)^n}{2^{-(n+1)}}$ ، $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x^2+\cdots$

سوال ششم: الف) نشان دهید تابع $f(x)=2x^3-x^2+x-7$ دقیقاً یک ریشه دارد.

۵ نمره

پاسخ: چون $f(x)$ پیوسته است و $f(0)=-7$ و $f(2)>0$ لذا طبق قضیه مقدار میانی حداقل یک ریشه بین ۰ و ۲ دارد.

۱۰ نمره

حال اگر $f(c_1)=f(c_2)=0$ و $(c_1\neq c_2)$ طبق قضیه رل $f'(c)=0$ که c بین c_1, c_2 است ولی $f'(x)=6x^2-2x+1$ درجه دوم با $\Delta<0$ ریشه ندارد پس نمی‌تواند دو ریشه داشته باشد.

ب) نشان دهید $\operatorname{tg} x\geq \cos x-1$ (برای $x\geq 0$).

۱۰ نمره

پاسخ: قرار دهیم $h(x)=\operatorname{tg}x-\cos x+1$ لذا $h'(x)=1+\operatorname{tg}^2x+\sin x$. چون $1+\sin x\geq 0$ بنابراین $h'(x)\geq 0$ و لذا تابع $h(x)$ صعودی است (طبق قضیه)

۱۰ نمره

حال از شرط $x\geq 0$ ، صعودی بودن تابع $h(x)$ داریم $h(x)\geq h(0)$ و $h(0)=0$ پس $h(x)\geq 0$ و لذا حکم برقرار است.