



به نام خدا

تمرینات درسی ریاضی عمومی ۱، فصل انتگرال
ترم دوم سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵

۱. حدود زیر را به صورت انتگرال معین بیان کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{ki^2}{n^3} \quad (\text{ب}) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} \quad (\text{د}) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{i^2} \quad (\text{ج})$$

$$(x > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{j=1}^n \sin \frac{jx}{n} \quad (\text{و}) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^n \cos \frac{j\pi}{2n} \quad (\text{ه})$$

$$(u > 0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u}{n} \sum_{j=1}^n \arctan \frac{j u}{n} \quad (\text{ح}) \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} \quad (\text{ز})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n-1)n}} \right) \quad (\text{ط})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^5 + \dots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^5 \right) \quad (\text{ی})$$

۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \quad (\text{ب}) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^2 + 1} dx \quad (\text{د}) \qquad \int_{-2}^2 x \sqrt{x^2 + 1} dx \quad (\text{ج})$$

$$\int_{-1}^2 \left(\int_1^2 x t dt \right) dx \quad (\text{و}) \qquad \int_0^1 \left(\int_1^x 2 t dt \right) dx \quad (\text{ه})$$

۳. فرض کنید $1 - \frac{\pi}{3} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x dx$. مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos 2x dx$ را محاسبه کنید.

۴. گزاره‌ی زیر را اثبات و یا با یک مثال نقض کنید.

اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ متحد با صفر نباشد، آنگاه $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.

۵. مشتق توابع زیر را بیابید.

$$F(x) = x^2 \int_2^{x^2} \sqrt{t^2 + 9} dt \quad (\text{ب})$$

$$F(x) = \int_2^{x^2} t^2 \sqrt{t^2 + 9} dt \quad (\text{الف})$$

$$F(x) = \int_2^{f(x^2)} \frac{\sin^2 t dt}{1 + \sin^2 t + t^2} \quad (\text{د})$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x \sin t^2 dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ج})$$

۶. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x t \sqrt{3 + t^2} dt \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \int_1^x (t^2 + t) dt \quad (\text{الف})$$

۷. فرض کنیم تابع f مشتق‌پذیر و f' بر بازه $[0, 2]$ پیوسته باشد. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f'(t) dt$ را بیابید.

۸. فرض کنیم $f(t) = \int_1^{2t} \frac{\sin u}{u} du$ و $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$ مقدار $F''(\frac{\pi}{4})$ را بیابید.