



به نام خدا

ژنریپات هومی ریاضی عمومی ۱، فصل حد و پیوستگی
ترم دوم سال تحصیلی ۹۶ - ۹۵

۱. نشان دهید اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l$ و $b \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(bx)}{x} = bl$.

۲. نشان دهید حد توابع زیر در نقطه $x = 0$ موجود نیست.

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ گویا} \\ 1 & x \text{ گنگ} \end{cases} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (\text{الف})$$

۳. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$g(x) = \begin{cases} x & x \neq \frac{1}{n} \\ n & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

آیا تابع g در نقطه $x = 0$ حد دارد؟ در بقیه نقاط چطور؟

۴. فرض کنیم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = A$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = B$. حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^2 - x^4) \quad (\text{الف}) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x^5) \quad (\text{ب})$$

۵. حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) \quad (\text{ب}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x+1}(1 - \sqrt{2x+3})}{7 - 6x + 4x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) \quad (\text{د}) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \right) \quad (\text{ج})$$

۶. فرض کنیم یک همسایگی محذوف نقطه a ($-\infty < a < \infty$) موجود باشد که $g(x) \geq f(x)$. نشان دهید:

$$(\text{الف}) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$$

$$(\text{ب}) \text{ اگر } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \text{ آنگاه } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$$

۷. تحقیق کنید تابع $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$ در چه نقاطی پیوسته است.

۸. نشان دهید تابع f در نقطه x_0 پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = 0$.

۹. فرض کنیم برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ و $|f(x)| < 1$. نشان دهید اگر f

در $x = 0$ پیوسته باشد، آنگاه همه جا پیوسته است.

۱۰. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

در هر یک از موارد زیر نقاط ناپیوستگی تابع $\operatorname{sgn} \circ g$ را بیابید.

(الف) $g(x) = 1 + x^2$ (ب) $g(x) = x(1 - x^2)$ (ج) $g(x) = x - [x]$

۱۱. فرض کنیم تابع f بر \mathbb{R} پیوسته و c یک عدد حقیقی مثبت باشد. نشان دهید تابع زیر بر \mathbb{R} پیوسته است:

$$f_c(x) = \begin{cases} -c & \text{اگر } f(x) < -c \\ f(x) & \text{اگر } |f(x)| \leq c \\ c & \text{اگر } f(x) > c \end{cases}$$

۱۲. نشان دهید معادله $\sin x - x + 1 = 0$ حداقل دارای یک ریشه است.

۱۳. نشان دهید تابع $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x} \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$ در $(0, 1)$ تعداد نامتناهی ریشه دارد.

۱۴. فرض کنیم $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد و $f(0) = f(2\pi)$. نشان دهید نقطه‌ای مانند c در $[0, \pi]$ موجود است که $f(c) = f(c + \pi)$.