



به نام خدا

تمرینات هوشی ریاضی عمومی ۱، فصل مشتق
ترم دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱. نشان دهید تابع $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x - \sin\left(\frac{x}{x - \sin x}\right)}\right)$ در هر نقطه از دامنه‌ی خود مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق را بدست آورید.

۲. فرض کنیم تابع g در نقطه صفر مشتق‌پذیر باشد و $g(\circ) = g'(\circ) = \circ$. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

نشان دهید تابع f در نقطه صفر مشتق‌پذیر است و $f'(\circ)$ را بدست آورید.

۳. نشان دهید تابع زیر در هر نقطه حقیقی مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق را بدست آورید:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \left(5 + \sin \frac{1}{x}\right) & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

۴. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left[\frac{1}{x}\right] & x \neq \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

مشتق تابع f را در نقطه صفر در صورت وجود بیابید.

۵. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) & x > \circ \\ x^3 & x \leq \circ \end{cases}$$

نشان دهید تابع f بر \mathbb{R} مشتق‌پذیر است و ضابطه‌ی تابع مشتق را بدست آورید. آیا مشتق دوم f در نقطه صفر وجود دارد؟

۶. فرض کنیم $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد به طوری که $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ و $f(1) = 1$. هرگاه تابع g با $g(x) = f(f(x))$ تعریف شود، $g'(1)$ و $g''(x)$ را بیابید.

۷. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x} & x > \circ \\ \circ & x = \circ \end{cases}$$

نشان دهید مشتق f در تعداد نامتناهی نقطه از بازه $(0, 1)$ برابر با صفر است.

۸. مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f مشتق‌پذیر باشد و مقدار مشتق را در نقطه صفر بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x + a \sin x & x < 0 \\ 2x + b & x \geq 0 \end{cases}$$

۹. فرض کنیم تابع f به ازای هر دو عدد حقیقی x و y در رابطه $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ و نامساوی $|f(x)| < 1$ صدق کند و $f'(0) = 1$. نشان دهید f همه جا مشتق‌پذیر است و $f'(x) = 1 + f^2(x)$.

۱۰. (الف) نشان دهید به ازای هر عدد گویای p ، $0 < p < 1$ ، تابع f تعریف شده با ضابطه $f(x) = 1 + x^p - (1+x)^p$ بر بازه $[0, \infty)$ صعودی است.

(ب) با استفاده از (الف) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n و هر دو عدد مثبت a و b ، $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$.

۱۱. نشان دهید برای هر $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ ، $\sin x + \tan x > 2x$.

۱۲. فرض کنیم $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $f(1) = 0$. اگر برای هر $x \in (0, \infty)$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، نشان دهید:

(الف) برای هر $x, y \in (0, \infty)$ ، $f(xy) = f(x) + f(y)$

(ب) برای هر $x \in (0, \infty)$ ، $1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq x - 1$

۱۳. تابع $f(x) = x^4 + 3x - 4$ را در نظر بگیرید. نشان دهید دقیقاً یک عدد حقیقی c موجود است که $f(c) = -c^3$.

۱۴. (الف) نشان دهید معادله $x + \tan x = 0$ در $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ دقیقاً یک جواب دارد.

(ب) اکسترم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x) = x \sin x$ را در $[0, \frac{\pi}{4}]$ بدست آورید.

۱۵. فرض کنیم f و g دو تابع باشند به طوری که به ازای هر x ، $f(x) \neq 0$ ، $f'(x) = f(x)$ و $g'(x) = g(x)$. نشان دهید عدد حقیقی c موجود است که برای هر x ، $g(x) = cf(x)$.

۱۶. فرض کنیم f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند به طوری که به ازای هر x ، $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \neq 0$. نشان دهید توابع f و g حداکثر دارای یک ریشه هستند که آن‌ها نیز بر یکدیگر منطبق می‌باشند.

۱۷. نشان دهید:

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & x > 0 \\ -\frac{\pi}{4} & x < 0 \end{cases}$$

۱۸. نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی x و y ، $|\tan^{-1} x - \tan^{-1} y| < |x - y|$.

۱۹. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) آیا f در صفر پیوسته است؟

(ب) آیا f در صفر مشتق پذیر است؟

۲۰. نشان دهید برای هر عدد حقیقی $x > 0$ ، $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$.

۲۱. نشان دهید تابع مشتق پذیری مانند f با دامنه \mathbb{R} موجود است که $f(x) + f(x) + x = 0$ و مشتق f را در نقطه‌ی صفر بیابید.

۲۲. نشان دهید تابع مشتق پذیری مانند f با دامنه \mathbb{R} موجود است که $f(x+x^2) = x$ و مشتق f را در نقاط صفر و ۲ بدست آورید.

۲۳. فرض کنیم f و g دو تابع باشند به طوری که برای هر $x > 0$ ، $f'(x) = \frac{1}{x}$ و $f(g(x)) = x$. نشان دهید g همه جا مشتق پذیر است و $g'(x) = g(x)$.

۲۴. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x} & 0 < |x| < \frac{\pi}{4} \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

مشتق تابع f را در نقطه‌ی صفر در صورت وجود بیابید.

۲۵. حدهای زیر را محاسبه کنید:

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\tan x - x}$

(الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - 1 - \sqrt{x^2 - x})$

(د) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan^{-1} x}{\sqrt{\cos x - 1} + x \sin x}$

(ج) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin^{-1} x}{\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$

(ه) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x - 3 \sin 2x}{5x - \tan^{-1} 5x}$