به نام خدا

تمرینات درس ریاضی عمومی ۱، فصل دنباله‌ها
ترم دوم سال تحصیلی ۹۶-۹۵

۱. حد هر یک از دنباله‌های زیر را بدست آورید.

(۱) $a_n = \frac{1-2n}{1+n}$

(۲) $a_n = \frac{\sqrt{2n}-5}{n-3}$

(۳) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n-3}$

(۴) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}+\sqrt[5]{n}}$

(۵) $a_n = \frac{2n^2-n}{n^2+3}$

(۶) $a_n = \frac{1}{n}\cos(\frac{n^2}{n+1})$

(۷) $a_n = \sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1}$

(۸) $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}$

(۹) $a_n = \sqrt[8]{n^2-1}-\sqrt[4]{n+1}$

(۱۰) $a_n = \sqrt{n}+\frac{1}{n}$

(۱۱) $a_n = \frac{1(\sin 1)+\cdots+n(\sin n)}{n^3}$

(۱۲) $a_n = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{(2n)^n}$

(۱۳) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}-[\sqrt[3]{n}]}{n^2+n}$

(۱۴) $a_n = \frac{4n^2-\sqrt{n}}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$

(۱۵) $a_n = \sqrt[3]{n^2-n^3}+n$

(۱۶) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^4+n}-n}$

(۱۷) $a_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n$

(۱۸) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n}{n+1}$

(۱۹) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

(۲۰) $a_n = \frac{4^n}{n!}$

(۲۱) $a_n = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt[3]{n})^4}{n^2+1}$

(۲۲) $a_n = \frac{a^n+2}{a^{n+1}+3}$ که در آن $a > 1$ یک عدد حقیقی است.

(۲۳) $a_n = \frac{n}{a^n}$ که در آن $a > 1$ یک عدد حقیقی است.

(۲۴) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$ که در آن $a, b > 0$ اعداد حقیقی هستند.

۲. همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $a_n = \frac{(-۱)^n}{\sqrt{n}}$

(ب) $a_n = \frac{۱+(-۱)^n}{۳}$

(ج) $a_n = \frac{n+(-۱)^n}{\sqrt{۳n}+۲}$

(د) $a_n = \sqrt{۳ - \frac{(-۱)^n}{n}}$

(ه) $a_n = \frac{۱-(-۱)^n}{n}$

(و) $a_n = ۳ + \frac{(-۱)^n ۱۰^۶}{n}$

(ز) $a_n = \frac{n^۳}{n!}$

(ح) $a_n = \frac{n!}{۲^n}$

(ط) $a_n = (-۱)^n + \frac{۱}{n^۲}$

(ی) $a_n = n^۳ - \sin(n)$

(ک) $a_n = \frac{۱-n^۲}{n}$

(ل) $a_n = \frac{n^۲+۱}{\sqrt{n+۱}}$

(م) $a_n = \frac{۱}{n} - \sin(\frac{n\pi}{۲})$

(ن) $a_n = (۱+\frac{۱}{۲n})\cos(\frac{n\pi}{۳})$

۳. نشان دهید دنباله‌های زیر همگرا هستند و حد آن‌ها را بیابید.

(الف) $a_۱ = ۱, \quad a_{n+۱} = \sqrt{۲a_n}$

(ب) $a_۱ = \sqrt{۲}, \quad a_{n+۱} = \sqrt{۲+a_n}$

(ج) $a_۱ = ۱, \quad a_{n+۱} = ۱ + \frac{۱}{۱+a_n}$

۴. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای نامنفی همگرا به $a > ۰$ باشد. نشان دهید $\lim \sqrt[n]{a_n} = ۱$.

۵. فرض کنیم تابع f به ازای هر دو عدد حقیقی x و y و هر عدد گویای مثبت r، در نامساوی

$$|f(x) - f(y)| < M|x-y|^r$$

صدق کند و $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به عدد حقیقی a باشد. نشان دهید دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا به $f(a)$ است.

۶. نشان دهید دنباله $\{a_n\}$ همگرا به صفر است اگر و تنها اگر دنباله $\{|a_n|\}$ همگرا به صفر باشد.

۷. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) اگر دنباله $\{a_n\}$ به عدد حقیقی a همگرا باشد، دنباله $\{|a_n|\}$ نیز به $|a|$ همگراست.

(ب) اگر دنباله $\{|a_n|\}$ همگرا باشد، دنباله $\{a_n\}$ نیز همگراست.

(ج) اگر دنباله $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نیز هر دو همگرا هستند.

(د) اگر دنباله $\{a_n - b_n\}$ واگرا باشد، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ نیز هر دو واگرا هستند.

(ه) اگر $\lim a_n = \infty$ و $\lim b_n = -\infty$، آنگاه $\lim(a_n + b_n) = ۰$.

(و) اگر زیردنباله‌های $\{a_{2n}\}$ و $\{a_{2n-1}\}$ همگرا باشند، آنگاه $\{a_n\}$ همگراست.

(ز) اگر دنباله $\{|a_n|\}$ همگرا باشد، آنگاه $\{a_n\}$ کراندار است.

(ح) اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا و $\{b_n\}$ کراندار باشد، آنگاه $\{a_nb_n\}$ کراندار است.

(ط) اگر $\lim a_n = a$ و $\lim b_n = b$ (که a و b اعداد حقیقی هستند) و برای هر عدد طبیعی n، $a_n < b_n$، آنگاه $a < b$.