به نام خدا

آزمون میانی درس ریاضی عمومی ۱ ، نیمسال دوم ۹۶-۹۵

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده علوم ریاضی

---

۱. (۱۵ نمره) حدود زیر را بدست آورید.

(الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}$ (ب) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{\operatorname{arcsec}(x)}$

۲. (۱۰ نمره) تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \neq \frac{1}{n} \\ n^2 & x = \frac{1}{n} \end{cases}$$

آیا تابع f در نقطه $x = 0$ دارای حد است؟ پاسخ خود را با ذکر دلیل به طور کامل بیان کنید.

۳. (۲۰ نمره) (الف) صورت قضیه بولزانو را بیان کنید.

(ب) نشان دهید عدد حقیقی c موجود است که $2c^5 + 2c^3 + c = 3$.

(ج) بررسی کنید یک و تنها یک عدد c موجود است که $2c^5 + 2c^3 + c = 3$.

۴. (۱۵ نمره) (الف) مشتق پذیری تابع زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \arctan(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(ب) تابع $f'(x)$ را بدست آورید.

۵. (۱۵ نمره) فرض کنیم $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ تابعی مشتق پذیر باشد و $f(1) = 0$. اگر برای هر $x > 0$ داشته باشیم $f'(x) = \frac{1}{x}$، نشان دهید برای هر $x > 0$، نامساوی زیر برقرار است:

$$f(1+x) < x.$$

موفق باشید

پاسخ نامه آزمون پایانی درس ریاضی عمومی ۱
سال دوم ۹۵-۹۶

الف)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(2n+1)!}$$

نامساوی مناسب پیدا کردن (۲) نمره

(۱) نمره

$$0 \leq \frac{5^n}{(2n+1)!} = \frac{5\times5\times5\times\cdots\times5}{1\times2\times3\times\cdots\times5\times6\times\cdots\times(2n+1)} \leq \frac{5^4}{2\times3\times4}\times1 \times \frac{5}{(2n+1)}$$

$$\leq \underbrace{\frac{5^5}{2\times3\times4}}_{M}\times\frac{1}{2n+1}$$

(۱) نمره $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

(۱) نمره قضیه فشردگی

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{(2n+1)!}=0$$

ب)

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{\mathrm{Arcsec}(x)} \overset{0/3}{=} \lim_{x\to1^+}\frac{2x}{\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}} \overset{0/1}{=} \lim_{x\to1^+}\frac{2x}{\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

(۰/۵) $\mathrm{Arcsec}(1)=0$

مبهم از نوع صفر صفرم است

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{2x^2\sqrt{x^2-1}}{1} = 0$$ (۱ نمره)

و شرایط قاعده هوپیتال را بررسی می‌کنیم

بیان شرایط Hop (۲/۵ نمره)

(۲) باید بررسی کنیم آیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود است یا خیر در واقع می‌دانیم

۴ نمره

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \iff$$ برای هر دنباله (a_n) که $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ داشته باشیم $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=l$ *

اما داریم

۲ نمره $a_n=\frac{1}{n} \xrightarrow{\infty} 0$

۲ نمره $f(a_n)=n^2 \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

پس l موجود نیست و حد در صفر وجود ندارد

۲ نمره

اگر به نمودار اشاره شود درست نیست و صحیح * اشاره شود نمره بگیرند

۳) الف) فرض کنیم تابع f در $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ در این صورت حداقل یک c در (a,b) وجود دارد که $f(c)=0$

۰/۵ نمره

ب) ابتدا تابع $\underbrace{h(x)=2x^5+2x^3+x-3}_{\text{۰/۳ نمره}}$ را در نظر می‌گیریم در این صورت

$$\left.\begin{array}{l} \text{۰/۲ نمره} \begin{cases} h(0)=-3 \\ h(1)=5-3=2 \end{cases} \\ h(0)\,h(1)<0 \\ h \text{ تابع چندجمله‌ای در } [0,1] \text{ پیوسته (۰/۲ نمره)} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{الف}]{\text{بولزانو}} \text{(۱ نمره)}$$

حداقل یک c موجود است که ۱ نمره

$$h(c)=2c^5+2c^3+c-3=0$$

$$\Longrightarrow 2c^5+2c^3+c=3 \quad \text{۱ نمره}$$

ج)

$$h(x)=2x^5+2x^3+x-3 \quad \text{۱}$$

$$h'(x)=10x^4+6x^2+1>0 \overset{\text{۰/۳}}{\Longrightarrow} h' \text{ ریشه ندارد}$$

۱ نمره h حداکثر یک ریشه دارد $\xleftarrow{\text{بنا به نتیجه قضیه رل}}$

۱ نمره h دقیقاً یک ریشه دارد $\Longleftarrow$ ب و ج

۴) الف)

۵ نمره

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{Arctan}(1/x)-0}{x-0}}$$

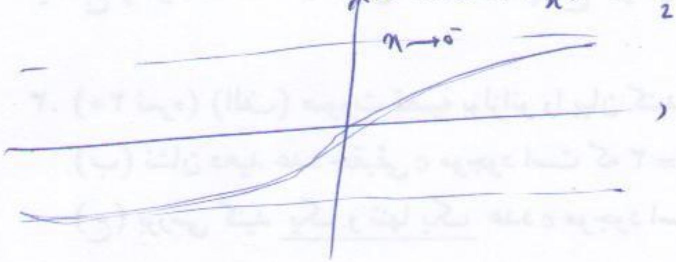
$$= \lim_{x\to 0} x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

۳ نمره

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

کراندار x صفر



$x=0 \Longrightarrow \quad f'(0)=0$ ۱ نمره

$$\boxed{x\neq 0 \quad f'(x) = 2x\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1}{x^2}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1}\cdot x^2}$$ ۵ نمره

۵) توجه کنید

$$h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x) = f(1+x) - x$$ ۴ نمره

چون f مشتق‌پذیر است $\Rightarrow h'(x) = f'(1+x) - 1$ ۳ نمره

$$= \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x}$$ ۲ نمره

۳ نمره

	0		$+\infty$
h'		$-$	
h		$\searrow$ نزولی	

$$x > 0 \Longrightarrow h(x) < h(0) = f(1) - 0 = 0$$ ۲ نمره

$$\Longrightarrow h(x) < 0 \Longrightarrow f(1+x) < x$$ ۱ نمره