به نام خدا

کوئیز اول معادلات دیفرانسیل

هر سوال ۵ نمره — (پنجم اسفند ۱۳۹۶) — وقت: ۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجویی: ....

نام استاد: .... گروه درسی: ....

سوال ۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$(e^x \sin y - ۲y \sin x)\, dx + (e^x \cos y + ۲ \cos x)\, dy = ۰$$

حل. داریم $M = e^x \sin y - ۲y \sin x$ و $N = e^x \cos y + ۲ \cos x$. چون

$$M_y = e^x \cos y - ۲ \sin x \quad \text{و} \quad N_x = e^x \cos y - ۲ \sin x$$

داریم $M_y = N_x$ و در نتیجه معادله دیفرانسیل کامل است. جواب عمومی معادله را به صورت زیر می‌یابیم

$$\begin{aligned}
&(e^x \sin y - ۲y \sin x)\, dx + (e^x \cos y + ۲ \cos x)\, dy = ۰ \\
&\quad \Longrightarrow \quad e^x \sin y\, dx - ۲y \sin x\, dx + e^x \cos y\, dy + ۲ \cos x\, dy = ۰ \\
&\quad \Longrightarrow \quad d(e^x \sin y) + d(۲y \cos x) = ۰ \\
&\quad \Longrightarrow \quad d(e^x \sin y + ۲y \cos x) = ۰ \\
&\quad \Longrightarrow \quad e^x \sin y + ۲y \cos x = c.
\end{aligned}$$

سوال ۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید

$$y'(x-2x^2\ln y)+y=0$$

حل. با تعویض نقش متغیر مستقل و وابسته معادله به یک معادله برنولی تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned}
y'(x-2x^2\ln y)+y=0 &\implies (x-2x^2\ln y)\frac{dy}{dx}=-y\\
&\implies x-2x^2\ln y=-y\frac{dx}{dy}\\
&\implies \frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x=2x^2\frac{\ln y}{y}\\
&\implies x^{-2}\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y}x^{-1}=2\frac{\ln y}{y},\quad z=x^{-1},\quad \frac{dz}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}\\
&\implies -\frac{dz}{dy}+\frac{1}{y}z=2\frac{\ln y}{y}\\
&\implies \frac{dz}{dy}-\frac{1}{y}z=-2\frac{\ln y}{y},\quad \mu=e^{-\int\frac{1}{y}\,dy}=\frac{1}{y}\\
&\implies \frac{1}{y}\frac{dz}{dy}-\frac{1}{y^2}z=-2\frac{\ln y}{y^2}\\
&\implies \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}z\right)=-2\frac{\ln y}{y^2}\\
&\implies \frac{1}{y}z=-2\left(-\frac{\ln y}{y}-\frac{1}{y}\right)+c\\
&\implies \frac{1}{xy}=2\frac{\ln y}{y}+\frac{2}{y}+c.
\end{aligned}$$

محاسبه انتگرال $\int\frac{\ln y}{y^2}\,dy$ با تغییر متغیر $t=\ln y$ و انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر انجام شده است:

$$\int\frac{\ln y}{y^2}\,dy=\int te^{-t}\,dt=-te^{-t}-e^{-t}=-\frac{\ln y}{y}-\frac{1}{y}$$

(می‌توانستیم ابتدا معادله را بر y تقسیم کنیم. سپس با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln y$ معادله را به یک معادله برنولی تبدیل کرده و مشابه بالا حل کنیم)