

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

(ترم تابستانی ۱۳۷۷)

وقت؟ دقیقه

(۱) هرگاه  $f$  تابعی با ضابطه‌ی  $f(z) = \frac{\ln(i\bar{z}^2 + 1)}{z^2 + 4}$  (لگاریتم شاخه‌ی اصلی) باشد.

(الف) حوزه‌ی نقاط تحلیلی  $f$  را بیابید.

(ب) انتگرال  $\oint_{|z|=1} f(z) dz$  را محاسبه کنید.

(۲) هرگاه  $f$  تابعی با ضابطه‌ی زیر باشد:

$$f(z) = \begin{cases} ze^{z/(z-i)} & z \neq i \\ 0 & z = i \end{cases}$$

(الف) نقطه‌ی تکین  $f$  و نوع آنرا مشخص کنید.

(ب) انتگرال  $\oint_{|z|=2} f(z) dz$  را محاسبه کنید.

(۳) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف)  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + 1} dx$

(ب)  $n \in \mathbb{N}, \oint_{\gamma} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n dz$

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

(ترم ؟؟؟؟)

وقت ؟ دقیقه

(۱) انتگرال‌های زیر را با ذکر دلیل و جزئیات محاسبه نمایید.

$$\int_{|z-\frac{\pi}{4}|=\frac{1}{4}} \frac{\sin(\ln \sin z)}{(z-\frac{\pi}{4})(e^z+1)} dz$$

(لگاریتم شاخه‌ی اصلی)

(۲) انتگرال‌های زیر را با ذکر دلیل و جزئیات محاسبه کنید.

$$\oint_{|z|=2} e^{z/(z-1)} dz \quad (\text{الف})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2} dx \quad (\text{ب})$$

(۳) معادله مشتق جزئی زیر را با شرایط داده شده حل نمایید (سوال اختیاری)

$$u = u(x, t)$$

$$u_{tt} - u_{xx} = x \sin t$$

$$u(0, t) = \sin t \quad , \quad u(1, t) = 1$$

$$u(x, 0) = x \quad , \quad u_t(x, 0) = 1$$

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

دیمه هفتاد و هشت

وقت دو ساعت و نیم

سوال اول) در صفحه‌ی مختلط مجموعه‌های زیر را به صورت هندسی نمایش دهید:

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re}(iz) \leq 1\}$$

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \operatorname{Re}(z) + 1\}$$

سوال دوم) کلیه توابع تحلیلی  $f = u + iv$  را پیدا کنید که برای آنها  $u = xy$ .

سوال سوم) به یکی از دو سوال زیر به دلخواه پاسخ دهید:

(الف) - تصویر ناحیه‌ی  $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \geq 1\}$  را تحت نگاشت

$$f(z) = \frac{z-1}{2-z}$$

پیدا کنید.

(ب) - ثابت کنید که

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

سوال چهارم) فرض کنید که  $f$  یک تابع تحلیلی در تمام صفحه باشد و برای هر  $z \in \mathbb{C}$  نامساوی  $|f(z)| \leq |e^z|$  برقرار باشد. اگر  $f(0) = i$ ، در این صورت ثابت کنید که

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-1)^3} dz = -\pi e$$

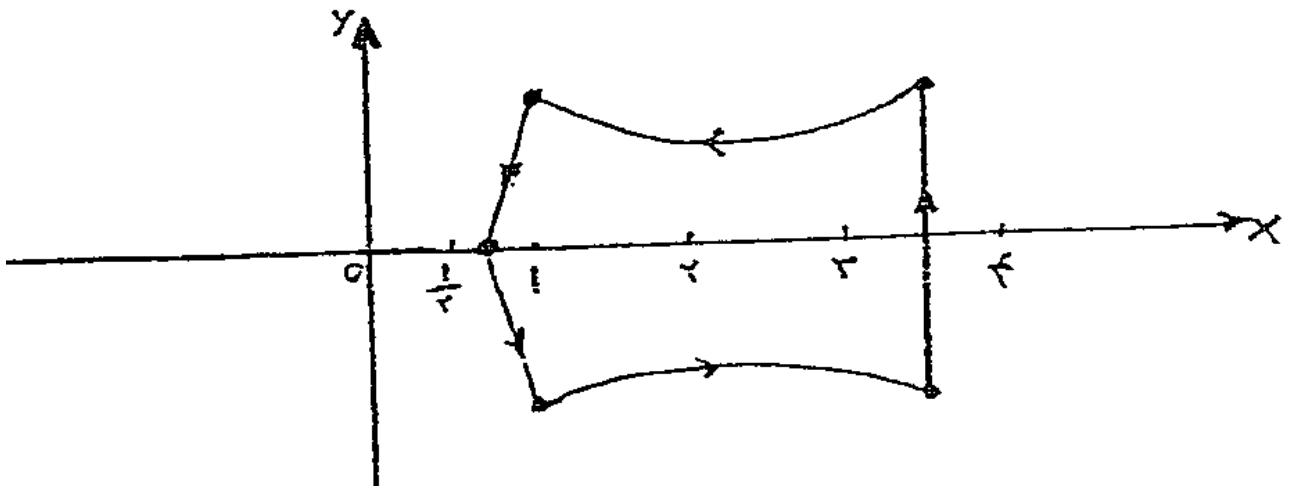
که در آن  $\gamma$  هر منحنی قطعه‌ای هموار ساده بسته است که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول نقطه‌ی  $z = 1$  چرخیده است.

سوال پنجم) تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(z) = \text{Log}(\cos z)$  در چه ناحیه‌ای از صفحه مختلط تحلیلی است؟ قسمتی از این ناحیه را روی شکل نشان دهید. (شاخه‌ی اصلی لگاریتم را در نظر بگیرید)

سوال ششم) سری لوران تابع

$$f(z) = \frac{z}{(2-z)(2z-1)}$$

را در ناحیه‌ی  $0 < |z-2| < 1$  پیدا نموده و به کمک آن انتگرال  $\int_{\gamma} f(z) dz$  را، که در آن  $\gamma$  منحنی نشان داده شده در شکل زیر است، حساب کنید:



سوال هفتم) فرض کنید که  $g$  و  $\phi$  دو تابع تحلیلی در  $z = a$  بوده و  $f$  تابعی با ضابطه‌ی

$$h(z) = (z - a)^m g(z)$$

که در آن  $m$  یک عدد صحیح است، باشد. اگر  $g(a) \neq 0$  در اینصورت مقدار مانده تابع  $h$  با ضابطه‌ی

$$h(z) = \phi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$$

را در  $z = a$  بدست آورید.

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

(ترم ؟؟؟؟)

وقت ۱۰۰ دقیقه

سوال یک. اگر تابع  $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$  باشد.

(الف) تعیین کنید  $u(x, y)$  در چه دامنه‌ای یک تابع همساز است.

(ب) تابع تحلیلی  $f$  را چنان بیابید که  $u(x, y)$  جزء حقیقی آن بوده و  $f(1) = 4$ .

سوال دو. اگر  $f$  تابعی تام باشد و برای هر  $z \in \mathbb{C}$ ،  $|f(z) - i| < 1$ .

(الف) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz$$

(ب) مطلوب است محاسبه‌ی

$$\int_{|z-1|=2} \frac{z^2}{(z-1)^2} \ln \frac{z+i}{z} dz$$

که در آن  $\ln$  شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.

سوال سه. مقدار انتگرال حقیقی ناسره‌ی زیر را با استفاده قضیه‌ی مانده‌ها بدست

آورید.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)} dx$$

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

(ترم اول ۸۱-۸۲)

وقت دو ساعت و نیم

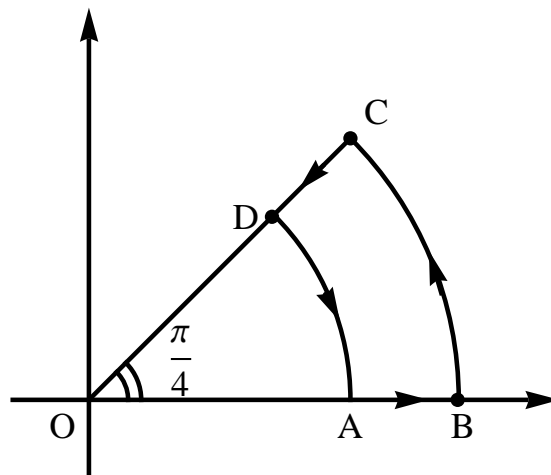
موفق باشید

(۱) نگاشت خطی-کسری بیابید که تحت آن نقاط ۲ و  $i$  ثابت بمانند و ۱ به  $\infty$  تصویر شود.  
(۱۰ نمره)

(۲) کلیه‌ی توابع تحلیلی  $f(z)$  را مشخص کنید که  $\text{Re} f'(z) = 3x^2 - 4y - 3y^2$ .  
(۱۸ نمره)

(۳) نقاط غیر تحلیلی تابع  $f(z) = \frac{\text{Ln}(1+z^2) \tan z}{z^4 + 4}$  را در صفحه‌ی مختلط مشخص کنید. (Ln شاخه اصلی لگاریتم است).  
(۱۸ نمره)

(۴) مطلوبست محاسبه‌ی  $\int_C \frac{\bar{z}}{z} dz$  که در آن  $C$  منحنی زیر است. (به ترتیب  $BC$  و  $DA$  به ترتیب قسمتی از دایره‌های به شعاع ۱ و  $\sqrt{2}$  و به مرکز مبدا مختصات هستند).  
(۱۸ نمره)



(۵) مقدار انتگرال  $\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz$  را بیابید.  
(۱۸ نمره)

(۶) مقدار انتگرال حقیقی ناسره‌ی  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 4x + 5} dx$  را بیابید.  
(۱۸ نمره)

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

(ترم اول ۸۱-۸۲)

وقت دو ساعت و نیم

سوال یک. تابع  $f(z)$  با ضابطه‌ی

$$f(z) = \frac{\text{Ln}(z - \frac{1}{z})}{(e^z + 1)(z^2 + 1)}$$

مفروض است، که در آن  $\text{Ln}$  شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.  
 (آ) در چه دامنه‌ای (= حوزه‌ای) تحلیلی است (ادعاهای خود را دقیقاً ثابت کنید).  
 (ب) مطلوبست محاسبه‌ی

$$\int_{|z-2|=\frac{1}{4}} f(z) dz$$

سوال دو. (آ) آیا تابع  $v(x, y) = \cos x \cosh y$  همساز است؟  
 (ب) تابع تحلیلی بیابید (در صورت وجود) که قسمت موهومی آن  $v(x, y)$  باشد.

سوال سه. تبدیل خطی کسری بیابید که ناحیه‌ی  $\text{Im}z \geq 0$  را به ناحیه‌ی  $|w| < 1$  تصویر کند.

سوال چهار. (آ) بسط لوران  $f(z) = \cos\left(\frac{z}{z-1}\right)$  را حول نقطه‌ی تکین آن بیابید.  
 (ب) انتگرال

$$\int_{|z|=2} \cos\left(\frac{z}{z-1}\right) dz$$

را محاسبه کنید.

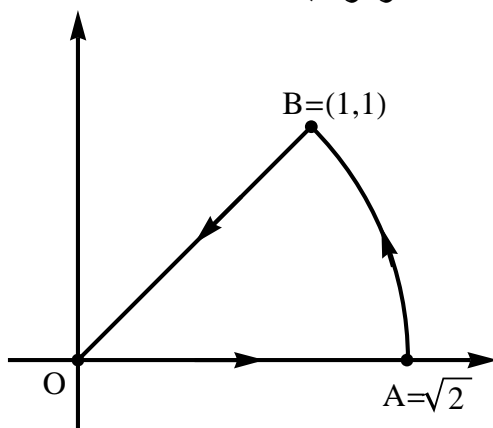
سوال پنج. مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال حقیقی زیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x + \cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

سوال یک. تابع تحلیلی  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  بیابید (در صورت وجود) که

$$u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$$

سوال دو. مطلوبست محاسبه‌ی  $\int_C z \operatorname{Re} z \, dz$ ، که در آن  $C$  منحنی زیر است:  $AB$  قسمتی از دایره به شعاع  $\sqrt{2}$  و مرکز مبدا است



سوال سه. تابع  $f(z)$  با ضابطه‌ی

$$f(z) = \frac{\operatorname{Ln}(1 - z^2)}{z(z^3 - i)(\tan z - i)}$$

مفروض است، که در آن  $\operatorname{Ln}$  شاخه‌ی اصلی لگاریتم است.  
(آ) در چه نقاطی تحلیلی است (ادعاهای خود را دقیقاً ثابت کنید).  
(ب) مطلوبست محاسبه‌ی

$$\int_{|z|=1/3} f(z) \, dz$$

سوال چهار. سری لوران  $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+2)}$  را در نواحی زیر بیابید:  
(الف)  $0 < |z-1| < 1$  (ب)  $1 < |z| < 3$

سوال پنج. مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال حقیقی زیر

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} \, dx$$



امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

خرداد ۱۳۸۵

وقت ۷۵ دقیقه

(۱) گیریم تابع مختلط  $w = f(z) = u + iv$  در دامنه‌ی  $D \subseteq \mathbb{C}$  تحلیلی و تابع حقیقی  $g = g(x, y)$  در  $D$  همساز باشد. ثابت کنید تابع

$$H = H(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$$

نیز در  $D$  همساز است.

(۲) (الف) - انتگرال ناسره‌ی زیر را با ذکر دلیل کامل محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx \quad a, b > 0$$

(ب) به کمک قسمت (الف) انتگرال ناسره‌ی زیر را نیز محاسبه کنید:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax + b)}{(x^2 + b^2)^2} dx \quad a, b > 0$$

(۳) (الف) - دامنه‌ی تحلیلی بودن تابع زیر را پیدا کنید:

$$f(z) = \frac{\ln\left(z + \frac{1}{z}\right)}{z^4(e^z + 1)}$$

(ب) - انتگرال خطی زیر را با ذکر دلیل بدست آورید:

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{4}} f(z) dz$$

امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی

موفق باشید

فروردین ۸۶

مدت ۸۰ دقیقه

(۱) تصویر ناحیه‌ی  $\left|z + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$  تحت نگاشت  $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$  را با استدلال کامل پیدا کنید. (۱۲ نمره)

(۲) فرض کنید که تابع مختلط  $f = u + iv$  در قلمرو  $D$  تحلیلی و رابطه‌ی  $u = -v^2$  در سرتاسر  $D$  برقرار باشد. ثابت کنید  $f$  روی  $D$  ثابت است. (۸ نمره)

(۳) سری لوران  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2(z+2)}$  را در ناحیه‌ی  $0 < |z+1| < 1$  پیدا کرده و انتگرال خطی

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz$$

را محاسبه کنید. (۱۲ نمره)

(۴) نقاط تکین و نوع آن‌ها را برای تابع  $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$  مشخص کنید و انتگرال خطی

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

را با استدلال کامل محاسبه کنید. (۸ نمره)

بنام خدا  
امتحان ریاضی مهندسی  
ترم دوم ۹۰-۸۹ (پایان ترم)  
وقت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

---

سوال ۱. (پانزده نمره) تابع  $f(z) = \frac{1}{(\cos^2 z - 1)(z^2 + 4i)}$  در چه ناحیه‌ای تحلیلی است (دقیقا مشخص کنید).

---

سوال ۲. (بیست نمره) فرض کنید تابع  $f(z) = u + iv$  در سرتاسر صفحه‌ی مختلط تحلیلی باشد، به طوری که  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 1$  و

$$u(x, y) = x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y.$$

تابع  $f(z)$  را بیابید.

---

سوال ۳. (پانزده نمره) تصویر ناحیه‌ی  $D = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, y \geq 0 \right\}$  را تحت تابع  $f(z) = \cos z$  بیابید.

---

سوال ۴. (پانزده نمره) سری لوران  $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z+2)}$  را حول  $z = 1$  بیابید و ناحیه‌ی همگرایی آن را مشخص کنید.

---

سوال ۵. (بیست نمره) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید  
(الف)  $\int_C \frac{\text{Ln}(i\bar{z})}{z} dz$ ، که در آن  $C$  نیم‌دایره‌ی بالایی  $x^2 + y^2 = 4$ ،  $y \geq 0$  است.

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z - 1}{1 - \cos z} dz \text{ (ب)}$$

---

سوال ۶. (پانزده نمره) مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)^2} dx$

---

امتحان میان ترم ریاضی مهندسی (ترم دوم ۹۱)

موفق باشید

ششم خرداد ۹۲

وقت: دو ساعت

سوال یک. (۲۰ نمره) بسط لوران تابع زیر را در ناحیه  $1 < |z| < 2$  بیابید

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(2-z)}$$

سوال دو. (۲۰ نمره) مقدار انتگرال زیر را بیابید

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-i} e^{1/z^2} dz$$

سوال سه. (۲۰ نمره)

مقدار انتگرال حقیقی زیر را محاسبه کنید (همه مراحل را دقیقاً انجام دهید)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2 + 4x + 5} dx$$

سوال چهار. (۲۰ نمره) تابع

$$f(z) = \frac{\text{Ln} \left( z - \frac{1}{z} \right)}{(e^z + 1)(z^4 + 1)}$$

که در آن  $\text{Ln}$  شاخه اصلی لگاریتم است، در چه ناحیه‌ای تحلیلی است (با انجام دقیق همه محاسبات).

سوال پنج. (۲۰ نمره) فرض کنید  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  یک تابع تحلیلی در تمامی صفحه مختلط باشد، به طوری که  $v(x, y) = h(xy)$  تابعی بر حسب  $xy$  است. علاوه بر آن  $f(0) = i$  و  $f(i) = 2 + i$ . ضابطه  $f$  را بیابید.

## به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

نام و نام خانوادگی .....

شماره‌ی دانشجویی .....

نام مدرس .....

مدت آزمون ۶۰ دقیقه

بخش سوالات تشریحی آزمون پایان ترم ریاضی مهندسی دی ماه ۱۳۸۷

- (۱) گیریم تابع  $f = u + iv$  روی مجموعه‌ی باز  $D \subset \mathbb{C}$  تحلیلی است.  
(الف) توضیح دهید که چرا تابع  $h$  با تعریف  $h(z) = \sin(f'(z))$  روی  $D$  تحلیلی است.  
(ب) توضیح دهید که چرا تابع دو متغیره  $H$  با تعریف

$$H(x, y) = \sin \left[ \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \right] \cosh \left[ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \right]$$

در  $D$  همساز است. (۲۰ نمره)  
2mm

- (۲) با استدلال کامل انگرال خطی

$$\int_{|z+3i|=1} \frac{\ln(iz^2 - i)}{\cosh(iz)(z+3i)} dz$$

را محاسبه کنید. (۳۰ نمره)  
2mm

2mm

- (۳) با استدلال کامل انگرال خطی

$$\int_{\gamma} \frac{\bar{z}}{1 - z\bar{z}} dz$$

که در آن  $\gamma(t) = 2e^{it}$  و  $0 \leq t \leq \pi$ ، را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)  
2mm

10mm

# موفق باشید

# بنام خدا

## امتحان میان ترم ریاضی مهندسی

بخش دوم: سوالات تشریحی

مدت ۸۰ دقیقه

فروردین ۸۶

---

(۱) تصویر ناحیه‌ی  $\left|z + \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}$  تحت نگاشت  $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$  را با استدلال کامل پیدا کنید. (۱۲ نمره)

---

(۲) فرض کنید که تابع مختلط  $f = u + iv$  در قلمرو  $D$  تحلیلی و رابطه‌ی  $u = -v^2$  در سرتاسر  $D$  برقرار باشد. ثابت کنید که  $f$  روی  $D$  ثابت است. (۸ نمره)

---

(۳) سری لوران تابع  $f(z) = \frac{z^2}{(z+1)^2(z-2)}$  را در ناحیه  $0 < |z+1| < 3$  پیدا کرده و انتگرال خطی

$$\oint_{|z|=3} f(z) dz$$

را محاسبه کنید. (۱۲ نمره)

---

(۴) نقاط تکین و نوع آنها را برای تابع  $f(z) = \frac{1}{z^2(e^z - 1)}$  مشخص کنید و انتگرال

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz$$

را با استدلال کامل محاسبه کنید. (۸ نمره)

---

8cm موفق باشید

# بنام خدا

## آزمون نهایی درس ریاضی مهندسی

### بخش دوم : سوالات تشریحی

مدت ۶۰ دقیقه

دی ماه ۸۵

2mm

۱) فرض کنید تابع  $f$  در سرتاسر  $C$  پیوسته و برای هر  $z \in C$  رابطه  $|f(z) - i| \leq 1$  برقرار باشد. اگر  $f(0) = -\pi$ ،  $g(z) = \sin(\overline{f(z)}) + |f(z)|$ ، و برای هر مرز ساده بسته  $\gamma$  داشته باشیم  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ ، با استدلال کامل نشان دهید:

$$i \oint_{|z|=1} z g(z) d\bar{z} = 2\pi^2.$$

(۲۰ نمره)  
3mm

2mm

۲) با استدلال کامل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

(۲۰ نمره)  
3mm

2mm

۳) فرض کنید

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sinh z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases}$$

با استدلال کامل انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\oint_{|z-i|=2} \frac{e^{f(z)}}{z^2} dz.$$

(۲۰ نمره)  
3mm

موفق باشید 9cm



باسمه تعالی

## آزمون پایان ترم ریاضی مهندسی

تاریخ: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۱

مدت امتحان: ۲/۵ ساعت

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

نام مدرس:

توجه ۱: این دفترچه به انضمام برگه مشخصات شامل ۸ برگه و ۷ سوال است که هر کدام در یک برگه مجزا نوشته شده است.

توجه ۲: پاسخ هر سوال را در برگه مخصوص آن بنویسید و به هیچ وجه برگه‌ها را از دفترچه جدا نکنید.

توجه ۳: ارزش امتحان ۱۰۰ از ۲۰۰ (۱۰ از ۲۰) است.

توجه ۴: در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی‌شود.

توجه ۵: در طول امتحان به هیچ وجه از تلفن همراه و ماشین حساب استفاده نکنید.

توجه ۶: در صفحه مشخصات بجز موارد خواسته شده در فوق چیز دیگری ننویسید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	جمع



(۱۰ نمره)

۱. با استدلال کامل، همه ریشه‌های معادله زیر را بدست آورید،

$$\sin^2 z = \frac{1}{4} \sin(2z).$$

۲. ابتدا مانده تابع  $f(z) = \frac{1}{\sin^2 z}$  را در نقطه  $z = 0$  پیدا کنید. سپس انتگرال خطی  $\int_{|z|=1} \frac{dz}{\sin^2 z}$  را پیدا کنید. (۱۰ نمره)

۳. تصویر ناحیه  $D$  از صفحه با تعریف زیر را تحت نگاشت  $T(z) = \frac{i}{z} - 1$  پیدا کنید،

(۱۵ نمره)

$$D = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq y \leq 2x + 1\}.$$

۴. فرض کنید تابع  $f = u + iv$  در دامنه  $D \subseteq \mathbb{C}$  تحلیلی است و در این دامنه برای عدد طبیعی ثابت  $n \geq 2$ ، داریم  $u = v^n$ . ثابت کنید در این دامنه،  $f$  تابعی ثابت است. (۱۰ نمره)

۵. مطلوبست محاسبه انتگرال

$$\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\ln\left(\frac{1-z}{1+z}\right)}{z^2 \cos z} dz,$$

(۲۰ نمره)

که در آن لگاریتم با شاخه اصلی است.

۶. سری لوران تابع  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)(z-2)}$  را در نواحی  $|z| > 2$  و  $1 < |z| < 2$  پیدا کنید.  
(۲۰ نمره)

(۱۵ نمره)

۷. انتگرال حقیقی زیر را با استدلال کامل محاسبه کنید،

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx.$$

بسمه تعالی

ریاضی مهندسی  
امتحان پایان ترم

۹۱/۱۰/۱۰

وقت: ۱۵۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی:

شماره دانشجویی:

نام مدرس:

۱. [۱۵ نمره] تصویر مستطیل

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

را تحت نگاشت  $w = \sin z$  بدست آورید.

۲. [۴۰ نمره] مقدار انتگرال های زیر را با استدلال کامل بیابید:

$$\oint_{|z|=2} \frac{z \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz}{1+z} \quad (\text{ب}) \quad \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-z^2) dz}{z^2(1+e^z)} \quad (\text{الف})$$

که در آن  $\ln(z)$  شاخه اصلی لگاریتم را نشان می دهد.

۳. [۲۰ نمره] انتگرال نامتناهی زیر را با ذکر جزئیات محاسبه کنید:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

۴. [۱۵ نمره] مانده تابع  $f(z) = \sinh(z^3) \cos\left(\frac{1}{z}\right)$  را در  $z = 0$  محاسبه کنید.

۵. [۱۰ نمره] فرض کنید تابع  $f(z)$  در صفحه  $\mathbb{C}$  تحلیلی (تام) باشد و  $|f(z) - i| \leq 1$  نشان دهید  $\sin(\overline{f(z)})$  در  $\mathbb{C}$  تابعی ثابت است.

موفق باشید