بسمه تعالی

ریاضی عمومی ۱

جوابهای میانترم

۹۷/۰۱/۲۳ | | وقت : ۱۴۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | نام مدرس:

تمرین های درس مبانی ماتریسها و جبر خطی سری دوم

۱) فرض کنید $A_۱, A_۲, \cdots, A_k$ ماتریسهای مربعی باشند بطوریکه $\sum_{i=۱}^{k} A_i A_i^T = ۰$.
نشان دهید $A_i = ۰$ برای هر $i = ۱, ۲, \cdots, k$.
۲) برای هر ماتریس مربعی A با شرط $A^۲ = ۰$، نشان دهید که $rank(A) \leq \frac{n}{۲}$.
۳) برای هر ماتریس $A_{m\times k}$ نشان دهید ماتریس $(I_{m\times m} + AA^T)$ وارون پذیر است.
۴) فرض کنید A یک ماتریس مربعی $n \times n$ است و فرض کنید
$$W = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = ۰\}.$$
نشان دهید $\dim W = n(n - rank(A))$.
۵) فرض کنید برای هر $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_۲[x]$ تعریف کنیم
$$< f, g >= \int_{-۱}^{۱} f(x)g(x)dx.$$
عضو $h(x)$ را در $\mathbb{R}_۲[x]$ بدست آورید بطوریکه
$$\forall g(x) \in \mathbb{R}_۲[x], \quad < h(x), g(x) >= g(۰).$$
۶) فرض کنید $T : V \to V$ یک تبدیل خطی روی میدان F باشد و برای هر زیر فضای W از V داشته باشیم $T(W) \subseteq W$. نشان دهید
$$\exists\, \lambda \in F : \forall\, v \in V,\ \ T(v) = \lambda v.$$
۷) نشان دهید
$$rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B),$$
$$rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}.$$
۸) برای ماتریسهای وارون پذیر A و B ثابت کنید
$$adj(AB) = adj(B)adj(A),$$
$$adj(A^T) = (adj A)^T,$$
$$adj(adj A) = (\det A)^{n-۲}A.$$
۹) فرض کنید $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تبدیل خطی و A ماتریس آن باشد. نشان دهید
$$A = A^T \Longleftrightarrow \forall u, w \in \mathbb{R}^n, \quad < T(u), w >=< u, T(w) > .$$
۱۰) فرض کنید ماتریس A با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است. اگر $tr(A^۲) = ۰$
نشان دهید A پوچتوان است.

۱۱) نشان دهید هر ماتریس بالا مثلثی، جمع یک ماتریس خودتوان و یک ماتریس وارون پذیر است.
۱۲) نشان دهید اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس پوچتوان باشد آنگاه $C_A(x)=x^n$. در مورد $m_A(x)$ چه می توان گفت؟
۱۳) نشان دهید برای هر $r\in\mathbb{R}\setminus\{۰\}$ داریم $C_{rA}(x)=r^nC_A(\frac{x}{r})$ که A یک ماتریس $n\times n$ است.
۱۴) در مساله ی ۱۳ اگر A وارون پذیر باشد نشان دهید

$$C_{A^{-۱}}(x)=\frac{(-x)^n}{\det A}C_A(\frac{۱}{x}).$$

۱۵) اگر ماتریسهای A و B متشابه باشند و $f(x)$ یک چندجمله ای باشد. نشان دهید $f(A)$ و $f(B)$ متشابه هستند.
۱۶) یک پایه ی متعامد یکه برای فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای زیر در $\mathbb{C}^۳$ بیابید.

$$\{(i,i,i),(۰,i,i),(۰,۱,i)\}.$$

۱۷) فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی باشد و $u,v\in V$. نشان دهید
(الف) u و v متعامد هستند اگر و تنها اگر $||v+u||=||v-u||$.
(ب) $u+v$ و $u-v$ متعامد هستند اگر و تنها اگر $||v||=||u||$.
(ج) $<u,v>=\frac{۱}{۴}(||u+v||^۲+||u-v||^۲)$.
۱۸) نشان دهید که اگر $A\in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ آنگاه هر مقدار ویژه ی AA^* حقیقی و نامنفی است.
۱۹) قرار دهید $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۲ & ۵ \end{bmatrix}$. در اینصورت کدامیک از توابع زیر یک ضرب داخلی روی $\mathbb{R}^۲$ را مشخص می کند:

$$f,g:\mathbb{R}^۲\times\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R},\quad f(u,v)=v^*Au,\quad g(u,v)=v^*Bu.$$

۲۰) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و $T:V\to V$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که $T^۲=T$. ثابت کنید $V=ker(T)\oplus Im(T)$.
۲۱) فرض کنید V یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان F و $T:V\to V$ یک تبدیل خطی باشد به طوری که $rank(T^۲)=rank(T)$. ثابت کنید

$$ker(T)\cap Im(T)=\{۰\}.$$

۲۲) فرض کنید V و W فضاهای برداری با تولید متناهی روی میدان F باشند. نشان دهید که اگر $S,T:V\to W$ تبدیل های خطی باشند که $ker(T)=ker(S)$، آنگاه تبدیل خطی وارون پذیر $R:W\to W$ وجود دارد که $S=RT$.
۲۳) فرض کنید رتبه ی ماتریس $A\in M_n(F)$ برابر با ۱ باشد. نشان دهید اسکالر $\lambda\in F$ وجود دارد که $A^۲=\lambda A$.