

بسمه تعالی

وقت : ۱۴۰ دقیقه

ریاضی عمومی ۱  
جوابهای میانترم

۹۷/۰۱/۲۳

نام مدرس:

شماره دانشجویی:

نام و نام خانوادگی:

---

## تمرین های درس مبانی ماتریسها و جبر خطی سری دوم

(۱) فرض کنید  $A_1, A_2, \dots, A_k$  ماتریسهای مربعی باشند بطوریکه  $\sum_{i=1}^k A_i A_i^T = 0$ .

نشان دهید  $A_i = 0$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, k$ .

(۲) برای هر ماتریس مربعی  $A$  با شرط  $A^2 = 0$ ، نشان دهید که  $\text{rank}(A) \leq \frac{n}{2}$ .

(۳) برای هر ماتریس  $A_{m \times k}$  نشان دهید ماتریس  $(I_{m \times m} + AA^T)$  وارون پذیر است.

(۴) فرض کنید  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  است و فرض کنید

$$W = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

نشان دهید  $\dim W = n(n - \text{rank}(A))$ .

(۵) فرض کنید برای هر  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_1[x]$  تعریف کنیم

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

عضو  $h(x)$  را در  $\mathbb{R}_1[x]$  بدست آورید بطوریکه

$$\forall g(x) \in \mathbb{R}_1[x], \quad \langle h(x), g(x) \rangle = g(0).$$

(۶) فرض کنید  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی روی میدان  $F$  باشد و برای هر زیر فضای

$W$  از  $V$  داشته باشیم  $T(W) \subseteq W$ . نشان دهید

$$\exists \lambda \in F : \forall v \in W, \quad T(v) = \lambda v.$$

(۷) نشان دهید

$$\begin{aligned} \text{rank}(A + B) &\leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B), \\ \text{rank}(AB) &\leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}. \end{aligned}$$

(۸) برای ماتریسهای وارون پذیر  $A$  و  $B$  ثابت کنید

$$\begin{aligned} \text{adj}(AB) &= \text{adj}(B)\text{adj}(A), \\ \text{adj}(A^T) &= (\text{adj}A)^T, \\ \text{adj}(\text{adj}A) &= (\det A)^{n-2}A. \end{aligned}$$

(۹) فرض کنید  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  یک تبدیل خطی و  $A$  ماتریس آن باشد. نشان دهید

$$A = A^T \iff \forall u, w \in \mathbb{R}^n, \quad \langle T(u), w \rangle = \langle u, T(w) \rangle.$$

(۱۰) فرض کنید ماتریس  $A$  با یک ماتریس بالا مثلثی متشابه است. اگر  $\text{tr}(A^2) = 0$  نشان دهید  $A$  پوچتوان است.

(۱۱) نشان دهید هر ماتریس بالا مثلثی، جمع یک ماتریس خودتوان و یک ماتریس وارون پذیر است.

(۱۲) نشان دهید اگر  $A_{n \times n}$  یک ماتریس پوچتوان باشد آنگاه  $C_A(x) = x^n$ . در مورد  $m_A(x)$  چه می توان گفت؟

(۱۳) نشان دهید برای هر  $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  داریم  $C_{rA}(x) = r^n C_A(\frac{x}{r})$  که  $A$  یک ماتریس  $n \times n$  است.

(۱۴) در مساله ی ۱۳ اگر  $A$  وارون پذیر باشد نشان دهید

$$C_{A^{-1}}(x) = \frac{(-x)^n}{\det A} C_A\left(\frac{1}{x}\right).$$

(۱۵) اگر ماتریسهای  $A$  و  $B$  متشابه باشند و  $f(x)$  یک چندجمله ای باشد. نشان دهید  $f(A)$  و  $f(B)$  متشابه هستند.

(۱۶) یک پایه ی متعامد یکه برای فضای تولید شده توسط مجموعه بردارهای زیر در  $\mathbb{C}^3$  بیابید.

$$\{(i, i, i), (0, i, i), (0, 1, i)\}.$$

(۱۷) فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد و  $u, v \in V$ . نشان دهید

(الف)  $u$  و  $v$  متعامد هستند اگر و تنها اگر  $\|v + u\| = \|v - u\|$ .

(ب)  $u + v$  و  $u - v$  متعامد هستند اگر و تنها اگر  $\|u\| = \|v\|$ .

(ج)  $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2)$ .

(۱۸) نشان دهید که اگر  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  آنگاه هر مقدار ویژه ی  $AA^*$  حقیقی و نامنفی است.

(۱۹) قرار دهید  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ . در اینصورت کدامیک از

توابع زیر یک ضرب داخلی روی  $\mathbb{R}^2$  را مشخص می کند:

$$f, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(u, v) = v^* Au, \quad g(u, v) = v^* Bu.$$

(۲۰) فرض کنید  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان  $F$  و  $T : V \rightarrow V$  یک

تبدیل خطی باشد به طوری که  $T^2 = T$ . ثابت کنید  $V = \ker(T) \oplus \text{Im}(T)$ .

(۲۱) فرض کنید  $V$  یک فضای برداری با بعد متناهی روی میدان  $F$  و  $T : V \rightarrow V$  یک

تبدیل خطی باشد به طوری که  $\text{rank}(T^2) = \text{rank}(T)$ . ثابت کنید

$$\ker(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}.$$

(۲۲) فرض کنید  $V$  و  $W$  فضاهای برداری با تولید متناهی روی میدان  $F$  باشند. نشان

دهید که اگر  $S, T : V \rightarrow W$  تبدیل های خطی باشند که  $\ker(T) = \ker(S)$ ، آنگاه

تبدیل خطی وارون پذیر  $R : W \rightarrow W$  وجود دارد که  $S = RT$ .

(۲۳) فرض کنید رتبه ی ماتریس  $A \in M_n(F)$  برابر با ۱ باشد. نشان دهید اسکالر

$$\lambda \in F \text{ وجود دارد که } A^\lambda = \lambda A.$$