به نام خدا

نکاتی در مورد توابع هذلولوی

(الف) معرفی توابع هذلولوی

۱. سینوس هذلولوی: تابع $\sinh$ را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \sinh(x) = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$$

تابع $\sinh$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\sinh'(x) = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x}) > ۰$$

بنابراین $\sinh$ بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. به طور خلاصه:

x	$-\infty$		∞
$\sinh'$		$+$	
$\sinh$		$\nearrow$	

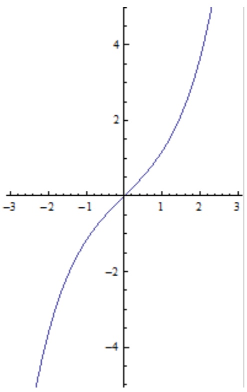
همچنین داریم:

$$\sinh(۰) = ۰$$

$$\lim_{x\to\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(\lim_{x\to\infty} e^x - \lim_{x\to\infty} e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(\infty - ۰) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(\lim_{x\to-\infty} e^x - \lim_{x\to-\infty} e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(۰ - \infty) = -\infty$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع $\sinh$ به صورت زیر خواهد بود:



۲. کسینوس هذلولوی: تابع $\cosh$ را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cosh(x) = \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x}) \end{cases}$$

تابع $\cosh$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\cosh'(x) = \frac{۱}{۲}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x)$$

بنابراین $\cosh'(۰) = ۰$، برای هر $x > ۰$، $\cosh'(x) > ۰$ و برای هر $x < ۰$، $\cosh'(x) < ۰$. در نتیجه صفر یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع $\cosh$ است و این تابع بر $[۰, \infty)$ اکیداً صعودی و بر $(-\infty, ۰]$ اکیداً نزولی است. به طور خلاصه:

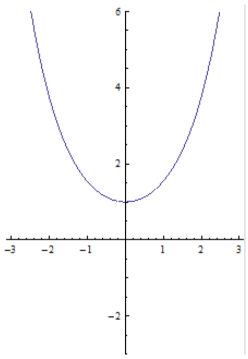
x	$-\infty$		۰		∞
$\cosh'$		$-$	۰	$+$	
$\cosh$		$\searrow$	۱	$\nearrow$	

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(\lim_{x\to\infty} e^x + \lim_{x\to\infty} e^{-x}) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{۲}(e^x + e^{-x}) = \frac{۱}{۲}(\lim_{x\to-\infty} e^x + \lim_{x\to-\infty} e^{-x}) = \infty$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع $\cosh$ به صورت زیر خواهد بود:



۳. تانژانت هذلولوی: تابع $\tanh$ را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \end{cases}$$

با توجه به بند ۱ و ۲، توابع $\sinh$ و $\cosh$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیرند و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\sinh'(x) = \cosh(x)$ و $\cosh'(x) = \sinh(x)$. بنابراین تابع $\tanh$ بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh^۲(x)} = \frac{\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x)}{\cosh^۲(x)}$$

امّا برای هر $x \in \mathbb{R}$، داریم:

$$\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x) = (\cosh(x) - \sinh(x))(\cosh(x) + \sinh(x))$$

از طرفی

$$\cosh(x) - \sinh(x) = \frac{۱}{۲}\left(e^x + e^{-x} - (e^x - e^{-x})\right) = \frac{۱}{۲}\left(۲e^{-x}\right) = e^{-x}$$

و به طور مشابه

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^x$$

و لذا

$$\cosh^۲(x) - \sinh^۲(x) = e^{-x}e^x = ۱$$

در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\tanh'(x) = \frac{۱}{\cosh^{۲}(x)} > ۰$$

بنابراین $\tanh$ بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی است. به طور خلاصه:

x	$-\infty$		∞
$\tanh'$		$+$	
$\tanh$		$\nearrow$	

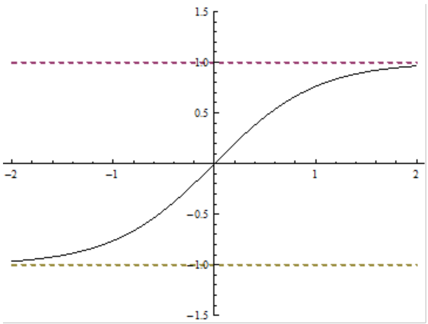
همچنین داریم:

$$\tanh(۰) = ۰$$

$$\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(۱ - e^{-۲x})}{e^x(۱ + e^{-۲x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{۱ - e^{-۲x}}{۱ + e^{-۲x}} = ۱$$

$$\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{۲x} - ۱)}{e^{-x}(e^{۲x} + ۱)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{۲x} - ۱}{e^{۲x} + ۱} = -۱$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع $\tanh$ به صورت زیر خواهد بود:



۴. کتانژانت هذلولوی: تابع $\coth$ را بر $\mathbb{R} \setminus \{۰\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \coth : \mathbb{R} \setminus \{۰\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \coth(x) = \dfrac{۱}{\tanh(x)} \end{cases}$$

تابع $\coth$ بر $\mathbb{R} \setminus \{۰\}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \neq ۰$،

$$\coth'(x) = \frac{-\tanh'(x)}{\tanh^{۲}(x)} = \frac{-\frac{۱}{\cosh^{۲}(x)}}{\frac{\sinh^{۲}(x)}{\cosh^{۲}(x)}} = -\frac{۱}{\sinh^{۲}(x)} < ۰$$

بنابراین $\coth$ بر هر یک از بازه‌های $(۰, \infty)$ و $(-\infty, ۰)$ اکیداً نزولی است. به طور خلاصه:

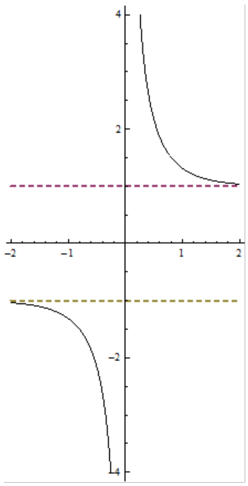
	$-\infty$		۰		∞
$\coth'$		$-$		$-$	
$\coth$		$\searrow$		$\searrow$	

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \coth(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\tanh(x)} = ۱ \qquad \& \qquad \lim_{x\to-\infty} \coth(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{\tanh(x)} = -۱$$

$$\lim_{x\to۰^-} \coth(x) = \lim_{x\to۰^-} \frac{۱}{\tanh(x)} = -\infty \qquad \& \qquad \lim_{x\to۰^+} \coth(x) = \lim_{x\to۰^+} \frac{۱}{\tanh(x)} = \infty$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع coth به صورت زیر خواهد بود:



۵. سکانت هذلولوی: تابع sech را بر $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \operatorname{sech} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{sech}(x) = \dfrac{۱}{\cosh(x)} \end{cases}$$

تابع sech بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\operatorname{sech}'(x) = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^{۲}(x)}$$

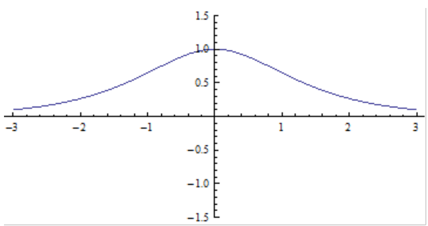
بنابراین $\operatorname{sech}'(۰) = ۰$، برای هر $x > ۰$، $\operatorname{sech}'(x) < ۰$ و برای هر $x < ۰$، $\operatorname{sech}'(x) > ۰$. در نتیجه صفر یک نقطه‌ی بحرانی برای sech است و این تابع بر $[۰, \infty)$ اکیداً نزولی و بر $(-\infty, ۰]$ اکیداً صعودی است. به طور خلاصه:

x	$-\infty$		۰		∞
sech'		$+$	۰	$-$	
sech		$\nearrow$	۱	$\searrow$	

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{۱}{\cosh(x)} = ۰ \qquad \& \qquad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{sech}(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{\cosh(x)} = ۰$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع sech به صورت زیر خواهد بود:



۶. کسکانت هذلولوی: تابع csch را بر $\mathbb{R} \setminus \{۰\}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} \operatorname{csch} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{csch} = \dfrac{۱}{\sinh(x)} \end{cases}$$

تابع csch بر $\mathbb{R}\setminus\{۰\}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \neq ۰$،

$$\operatorname{csch}'(x) = -\frac{\cosh(x)}{\sinh^{۲}(x)} < ۰$$

بنابراین csch بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, ۰)$ و $(۰, \infty)$ اکیداً نزولی است. به طور خلاصه:

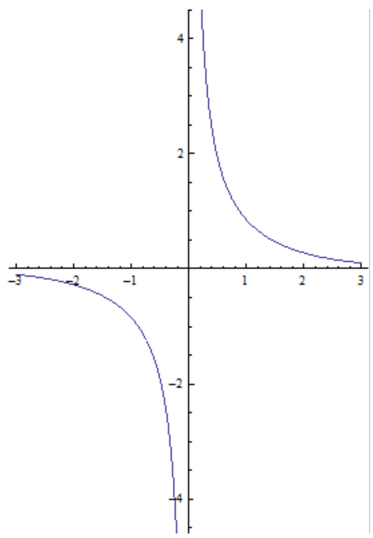
	$-\infty$		۰		∞
csch'	¦	$-$	¦	$-$	¦
csch	¦	$\searrow$	¦	$\searrow$	¦

همچنین داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{\sinh(x)} = -\infty \qquad \& \qquad \lim_{x\to ۰^+} \operatorname{csch}(x) = \lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{\sinh(x)} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{csch}(x) = ۰ = \lim_{x\to -\infty} \operatorname{csch}(x)$$

با توجه به مطالب فوق، نمودار تابع csch به صورت زیر خواهد بود:



(ب) فرمول‌ها و اتحادها

۱. فرمول‌های مشتق:

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \qquad \cosh'(x) = \sinh(x)$$

$$\tanh'(x) = \operatorname{sech}^{۲}(x) \qquad \coth'(x) = -\operatorname{csch}^{۲}(x)$$

$$\operatorname{sech}'(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x) \qquad \operatorname{csch}'(x) = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$$

۲. اتحادها:

* اتحادهای اصلی:

$$\cosh(x) + \sinh(x) = e^{x} \qquad \& \qquad \cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x}$$

$$\cosh^{۲}(x) - \sinh^{۲}(x) = ۱$$

$$\operatorname{sech}^{۲}(x) = ۱ - \tanh^{۲}(x) \qquad \& \qquad \operatorname{csch}^{۲}(x) = \coth^{۲}(x) - ۱$$

* سایر اتحادها:

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

$$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{۱ \pm \tanh(x)\tanh(y)}$$

$$\sinh^{۲}(\frac{x}{۲}) = \frac{\cosh(x) - ۱}{۲} \qquad \& \qquad \cosh^{۲}(\frac{x}{۲}) = \frac{\cosh(x) + ۱}{۲}$$

$$\cosh(x)\cosh(y) = \frac{۱}{۲}\Big(\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\Big)$$

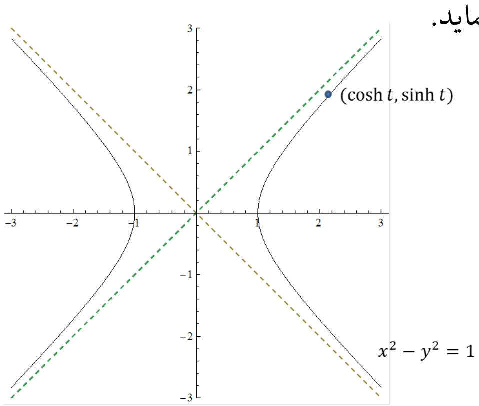
$$\sinh(x)\sinh(y) = \frac{۱}{۲}\Big(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\Big)$$

$$\sinh(x)\cosh(y) = \frac{۱}{۲}\Big(\sinh(x+y) + \sinh(x-y)\Big)$$

$$\sinh(x) + \sinh(y) = ۲\sinh(\frac{x+y}{۲})\cosh(\frac{x-y}{۲})$$

$$\cosh(x) + \cosh(y) = ۲\cosh(\frac{x+y}{۲})\cosh(\frac{x-y}{۲})$$

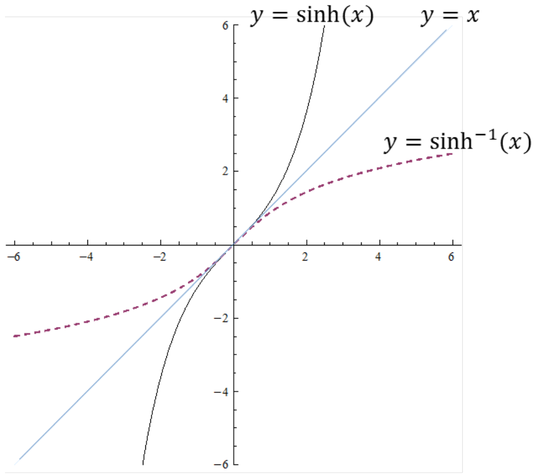
تذکر: با توجه به اتحاد $\cosh^{۲}(t) - \sinh^{۲}(t) = ۱$ می‌توان توابع $\cosh t$ و $\sinh t$ را به عنوان مختصات نقطه (x, y) روی هذلولی واحد $x^{۲} - y^{۲} = ۱$ در نظر گرفت. هرگاه t بین $-\infty$ و ∞ تغییر کند، نقطه $(\cosh t, \sinh t)$ شاخه‌ی سمت راست هذلولی واحد را می‌پیماید.



(ج) معکوس توابع هذلولوی

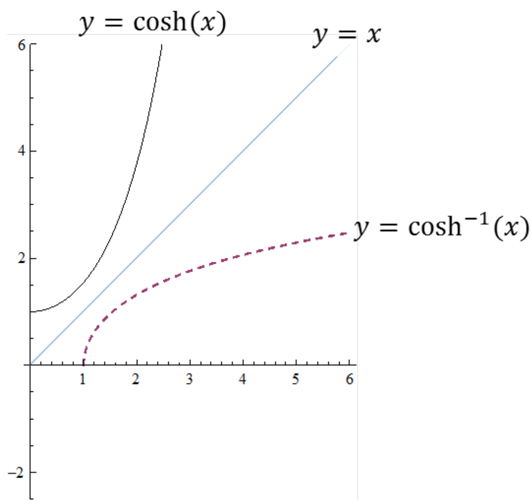
۱. سینوس هذلولوی: تابع sinh بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع sinh را با $\sinh^{-۱}$ یا arcsinh نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر sinh و در نتیجه دامنه‌ی $\sinh^{-۱}$ عبارت است از $\mathbb{R}$. اکنون فرض کنیم x یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \sinh^{-۱}(x)$. در این صورت $\sinh(y) = x$ و $\sinh'(y) = \cosh(y) \neq ۰$. چون sinh بر $\mathbb{R}$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\sinh'(y) \neq ۰$، بنا بر قضیه مشتق تابع معکوس، $\sinh^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\sinh^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\sinh'(y)} = \frac{۱}{\cosh(y)} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + \sinh^{۲}(y)}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$



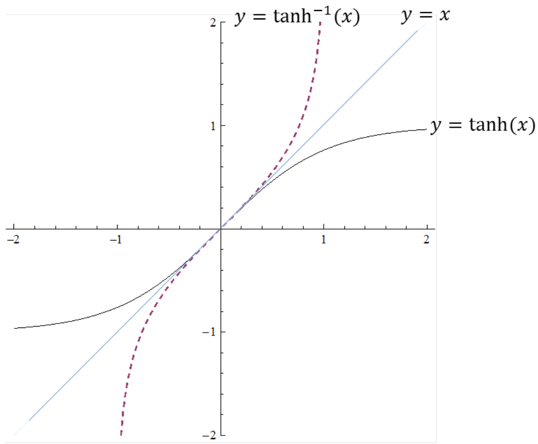
۲. کسینوس هذلولوی: تابع $\cosh$ بر $[۰, \infty)$ اکیداً صعودی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع $\cosh$ را با $\cosh^{-۱}$ یا $\operatorname{arccosh}$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر $\cosh$ بر بازه $[۰, \infty)$ و در نتیجه دامنه‌ی تابع $\cosh^{-۱}$ عبارت است از $[۱, \infty)$. اکنون فرض کنیم $x > ۱$ یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \cosh^{-۱}(x)$. در این صورت $\cosh(y) = x$ و $\cosh'(y) = \sinh(y) \neq ۰$. چون $\cosh$ بر $[۰, \infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\cosh'(y) \neq ۰$، بنا بر قضیه مشتق تابع معکوس، $\cosh^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\cosh^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\cosh'(y)} = \frac{۱}{\sinh(y)} = \frac{۱}{\sqrt{\cosh^{۲}(y) - ۱}} = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲} - ۱}}$$



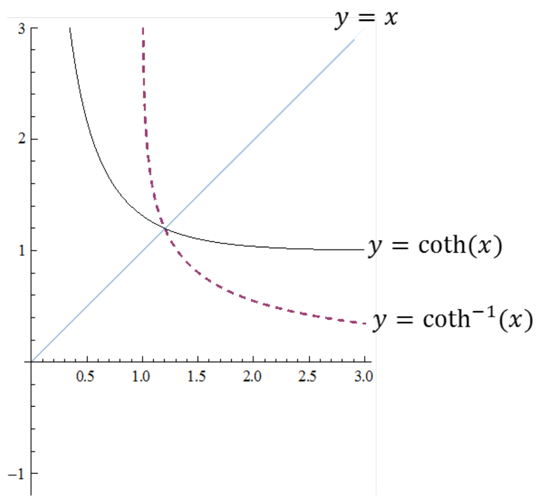
۳. تانژانت هذلولوی: تابع $\tanh$ بر $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع $\tanh$ را با $\tanh^{-۱}$ یا $\operatorname{arctanh}$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر $\tanh$ و در نتیجه دامنه‌ی $\tanh^{-۱}$ عبارت است از $(-۱, ۱)$. اکنون فرض کنیم $x \in (-۱, ۱)$ یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \tanh^{-۱}(x)$. در این صورت $\tanh(y) = x$ و $\tanh'(y) = \operatorname{sech}^{۲}(y) \neq ۰$. چون $\tanh$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\tanh'(y) \neq ۰$، بنا بر قضیه مشتق تابع معکوس، $\tanh^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\tanh^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\tanh'(y)} = \frac{۱}{\operatorname{sech}^{۲}(y)} = \frac{۱}{۱-\tanh^{۲}(y)} = \frac{۱}{۱-x^{۲}}$$



۴. کتانژانت هذلولوی: تابع coth بر $(۰,\infty)$ اکیداً نزولی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع coth را با $\coth^{-۱}$ یا arccoth نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر coth بر بازه $(۰,\infty)$ و در نتیجه دامنه‌ی تابع $\coth^{-۱}$ عبارت است از $(۱,\infty)$. اکنون فرض کنیم $x > ۱$ یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \coth^{-۱}(x)$. در این صورت $\coth(y) = x$ و $\coth'(y) = -\operatorname{csch}^{۲}(y) \neq ۰$. چون coth بر $(۰,\infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\coth'(y) \neq ۰$، بنا بر قضیه مشتق تابع معکوس، $\coth^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\coth^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\coth'(y)} = \frac{۱}{-\operatorname{csch}^{۲}(y)} = \frac{۱}{۱-\coth^{۲}(y)} = \frac{۱}{۱-x^{۲}}$$



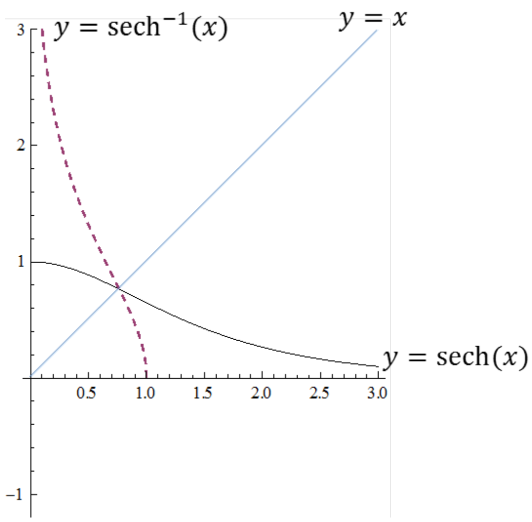
با در نظر گرفتن تابع coth بر بازه $(-\infty,۰)$ نیز نتیجه‌ی مشابهی بدست می‌آید. به طور کلی داریم:

$$(\coth^{-۱})'(x) = \frac{۱}{۱-x^{۲}}, \quad |x| > ۱$$

۵. سکانت هذلولوی: تابع sech بر $[۰,\infty)$ اکیداً نزولی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع sech را با $\operatorname{sech}^{-۱}$ یا arcsech نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر sech بر بازه $[۰,\infty)$ و در نتیجه دامنه‌ی تابع $\operatorname{sech}^{-۱}$ عبارت است از $(۰,۱]$. اکنون فرض کنیم $x \in (۰,۱)$ یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \operatorname{sech}^{-۱}(x)$. در این صورت $\operatorname{sech}(y) = x$ و $\operatorname{sech}'(y) = -\operatorname{sech}(y)\tanh(y) \neq ۰$. چون sech بر $(۰,۱)$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\operatorname{sech}'(y) \neq ۰$، بنا بر

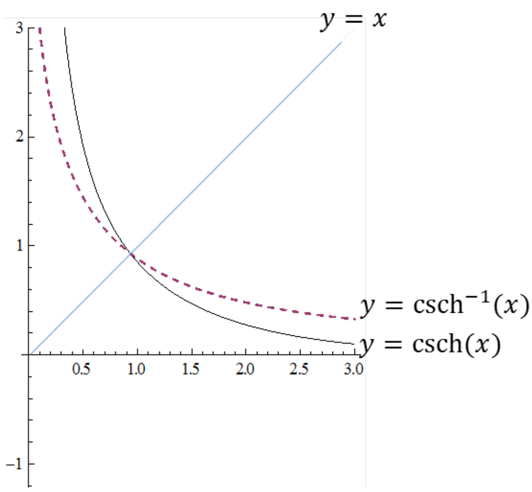
قضیه مشتق تابع معکوس، $\operatorname{sech}^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\operatorname{sech}^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\operatorname{sech}'(y)} = \frac{۱}{-\operatorname{sech}(y)\tanh(y)} = \frac{-۱}{\operatorname{sech}(y)\sqrt{۱-\operatorname{sech}^۲(y)}} = \frac{-۱}{x\sqrt{۱-x^۲}}$$



۶. کسکانت هذلولوی: تابع csch بر $(۰,\infty)$ اکیداً نزولی و لذا وارون‌پذیر است. معکوس تابع csch را با $\operatorname{csch}^{-۱}$ یا arccsch نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی تصویر csch بر بازه $(۰,\infty)$ و در نتیجه دامنه‌ی تابع $\operatorname{csch}^{-۱}$ عبارت است از $(۰,\infty)$. اکنون فرض کنیم $x > ۰$ یک عدد حقیقی باشد. قرار می‌دهیم $y = \operatorname{csch}^{-۱}(x)$. در این صورت $\operatorname{csch}(y) = x$ و $\operatorname{csch}'(y) = -\operatorname{csch}(y)\coth(y) \neq ۰$. چون csch بر $(۰,\infty)$ پیوسته و اکیداً صعودی است و $\operatorname{csch}'(y) \neq ۰$، بنا بر قضیه مشتق تابع معکوس، $\operatorname{csch}^{-۱}$ در x مشتق‌پذیر است و

$$(\operatorname{csch}^{-۱})'(x) = \frac{۱}{\operatorname{csch}'(y)} = \frac{۱}{-\operatorname{csch}(y)\coth(y)} = \frac{-۱}{\operatorname{csch}(y)\sqrt{۱+\operatorname{csch}^۲(y)}} = \frac{-۱}{x\sqrt{۱+x^۲}}$$



با در نظر گرفتن تابع csch بر بازه $(-\infty, ۰)$ نیز نتیجه‌ی مشابهی بدست می‌آید. به طور کلی داریم:

$$(\operatorname{csch}^{-۱})'(x) = \frac{-۱}{|x|\sqrt{۱+x^۲}}, \quad x \neq ۰$$

(د) ارتباط بین معکوس توابع هذلولوی و تابع لگاریتم طبیعی

$$(۱) \qquad \sinh^{-۱}(x) = \ln(x + \sqrt{x^۲+۱}), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(۲) \qquad \cosh^{-۱}(x) = \ln(x + \sqrt{x^۲ - ۱}), \quad x \geq ۱$$

$$(۳) \qquad \tanh^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{۱+x}{۱-x}), \quad |x| < ۱$$

$$(۴) \qquad \coth^{-۱}(x) = \frac{۱}{۲}\ln(\frac{x+۱}{x-۱}), \quad |x| > ۱$$

$$(۵) \qquad \operatorname{sech}^{-۱}(x) = \ln(\frac{۱+\sqrt{۱-x^۲}}{x}), \quad ۰ < x \leq ۱$$

$$(۶) \qquad \operatorname{csch}^{-۱}(x) = \ln(\frac{۱}{x} + \frac{\sqrt{x^۲+۱}}{|x|}), \quad x \neq ۰$$

اثبات (۱): تابع $f(x) = \sinh^{-۱}(x) - \ln(x + \sqrt{x^۲+۱})$ را بر $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم. با توجه به مشتق‌پذیری توابع $\ln$ و $\sinh^{-۱}$ و تابع $g(x) = x + \sqrt{x^۲+۱}$ بر دامنه‌های خود، با استفاده از قاعده‌ی زنجیری و مشتق‌پذیری حاصل‌جمع توابع، نتیجه می‌گیریم که تابع f بر $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$f'(x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} - \frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}\left(۱ + \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۱}}\right) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}} - \frac{۱}{x+\sqrt{x^۲+۱}}\left(\frac{\sqrt{x^۲+۱}+x}{\sqrt{x^۲+۱}}\right) = ۰$$

بنابراین f بر $\mathbb{R}$ تابع ثابت است. در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$، $f(x) = f(۰) = ۰$. بنابراین برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\sinh^{-۱}(x) = \ln(x + \sqrt{x^۲+۱})$$

* اثبات بقیه‌ی روابط به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

(۵) ارتباط بین معکوس توابع هذلولوی

$$(۱) \qquad \coth^{-۱}(x) = \tanh^{-۱}(\frac{۱}{x}), \quad |x| > ۱$$

$$(۲) \qquad \operatorname{sech}^{-۱}(x) = \cosh^{-۱}(\frac{۱}{x}), \quad ۰ < x \leq ۱$$

$$(۳) \qquad \operatorname{csch}^{-۱}(x) = \sinh^{-۱}(\frac{۱}{x}), \quad x \neq ۰$$

اثبات (۱): برای هر $x \in \mathbb{R}$ با شرط $|x| > ۱$ داریم:

$$\begin{aligned} y = \coth^{-۱}(x) \quad &\Longleftrightarrow \quad x = \coth(y) = \frac{۱}{\tanh(y)} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{۱}{x} = \tanh(y) \\ &\Longleftrightarrow \quad y = \tanh^{-۱}(\frac{۱}{x}) \end{aligned}$$

* اثبات بقیه‌ی روابط به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

برگرفته از کتاب‌های:

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره، تألیف دکتر حمیدرضا ظهوری زنگنه و دکتر امیر نادری.

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع حقیقی یک متغیره، تألیف جمعی از مدرسین دانشکده علوم ریاضی.