به نام خالق مهربان

پاسخ سوالات میان ترم ریاضی عمومی ۱ ترم اول ۹۳

---

۱. الف) $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

$a_n = n \tan \frac{1}{n} = \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ (۲ نمره)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{\frac{1}{n}\to 0} \frac{\tan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$ (۳ نمره)

بنابراین، طبق آزمون جمله عمومی، سری واگراست. (۱ نمره)

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}$

$a_n = \frac{\tanh n}{n^2}$ چون $n > 0$، داریم $0 < \tanh n \leq 1$ لذا $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n^2}$. (۳ نمره)

میدانیم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ طبق دستور سری فوق همساز همگراست. (۲ نمره)

در نتیجه طبق آزمون مقایسه سری همگراست. (۲ نمره)

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{ne^n}$

$a_n = \frac{1}{ne^n} > 0$ (۱ نمره)

چون ne^n صعودی است پس $\frac{1}{ne^n}$ نزولی است. (۳ نمره)

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{ne^n} = 0$ (۱ نمره)

در نتیجه طبق آزمون سری متناوب (لایپ نیتس) سری همگراست. (۲ نمره)

۲. الف) برای $x > 0$ داریم $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}}$. از پیوستگی توابع x، $\ln x$ و e^x و با توجه به اینکه $x > 0$ بنابر قضایای پیوستگی، نتیجه میشود $\frac{\ln x}{x}$ و $e^{\frac{\ln x}{x}}$ پیوسته هستند. (۳ نمره)

به همین ترتیب برای $x < 0$ و از پیوستگی توابع x^2 و $\sinh x$ نتیجه میشود $f(x) = \sinh x^2$ پیوسته است. (۳ نمره)

از سوی دیگر

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$$

زیرا $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

حال اگر $x_n \to 0$ و $x_n > 0$، آنگاه $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ و $\ln x_n \to -\infty$ در نتیجه $\frac{\ln x_n}{x_n} \to -\infty$ پس $e^{\frac{\ln x_n}{x_n}} \to 0$ (۴ نمره)

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sinh x^2 = \sinh(\lim_{x\to 0^-} x^2) = \sinh 0 = 0$$

زیرا $\sinh x$ در $x = 0$ پیوسته است.

در نتیجه

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

پس f در صفر نیز پیوسته است. (۴ نمره)

ب) بنا بر (الف) تابع f با ضابطه $f(x) = x^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}$ بر $(0, +\infty)$ پیوسته است. (۲ نمره)

$f(1) = 1 - \frac{1}{2} > 0$ (۱ نمره)

$f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} < 0$ (۱ نمره)

پس بنابر قضیه بولترانو عدد $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ وجود دارد که $f(c) = 0$ یعنی $c^{\frac{1}{c}} = \frac{1}{2}$. (۲ نمره)

۳. الف)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^{\frac{3}{2}}\ln h}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{\frac{1}{2}}\ln h=0$$

بنابر مثال حل شده کتاب برای $r>0$، $\lim_{x\to 0^+}x^r\ln x=0$. (۶ نمره)

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2 3^h}{h}=\lim_{h\to 0^-}h3^h=0\times 1=0$$

در نتیجه $f'_+(0)=f'_-(0)=0$. یعنی f در صفر مشتق پذیر است و $f'(0)=0$. (۶ نمره)

ب) برای $x>0$ داریم $f(x)=x^{\frac{3}{2}}\ln x$. پس از مشتق پذیری $\ln x$ و $x^{\frac{3}{2}}$ نتیجه میگیریم f مشتق پذیر است. به همین ترتیب از مشتق پذیری 3^x و x^2 نتیجه میگیریم برای $x<0$ تابع f مشتق پذیر است.

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\ln x+x^{\frac{1}{2}} & x>0\\ \\ 2x3^x+x^2\ln 3\ 3^x & x\le 0\end{cases}$$

(۸ نمره)