

احتمال و شمارش

- اگر A و B مستقل باشند و $A \cap B \neq \emptyset$ باشد
- فرض کنید S یک فضای نمونه باشد و $A \subset S$ و $B \subset S$. اگر $P(A) > 0$ نشان دهید

$$B \subset A \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} \quad \text{و} \quad A \subset B \Rightarrow P(B|A) = 1$$

- کلیه اشیا ۳ تپ قرمز و ۷ تپ آبی رنگه ۲ شامل و تپ قرمز و ۴ تپ آبی است. یک کلبه به طور تصادفی انتخاب و یک تپ از آن برداشته می‌گردد. (الف) احتمال آن که تپ قرمز باشد را محاسبه کنید. (ب) با فرض این که تپ برداشته شده قرمز باشد احتمال شرطی که آن تپ از کلبه دوم باشد را محاسبه کنید.

$$P(x) = c \left(\frac{x}{3}\right)^2, \quad x=1,2,\dots \quad \text{دارای تابع احتمال (هـ در سایر نقاط) باشد. } c \text{ را بیابید.}$$

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad \text{۵- هرگاه } x \text{ یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال باشد (الف) مقدار } c \text{ را بیابید.}$$

$$\text{(ب) تابع توزیع } x \text{ را به دست آورید و با استفاده از آن } P(0 < x < \frac{1}{2}) \text{ را محاسبه کنید.}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{۶- هرگاه متغیر تصادفی } x \text{ دارای تابع توزیع باشد میانگین، واریانس، و } E(e^{2x+1}) \text{ را محاسبه کنید.}$$

$$\text{۷- برای هر یک از توابع چگالی احتمال } x \text{ زیر } P(|x| < 1) \text{ و } P(x^2 < 9) \text{ را محاسبه کنید.}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{18}, \quad -3 < x < 3 \quad \text{(هـ سایر نقاط)}$$

$$f(x) = \frac{x+4}{18}, \quad -2 < x < 4 \quad \text{(ب سایر نقاط)}$$

$$\text{۸- هرگاه } f(x) = \frac{1}{2x} \text{ (برای } 1 < x < 16 \text{ و هـ در سایر نقاط) تابع چگالی}$$

$$\text{احتمال } x \text{ باشد، } A_1 = (1, 2), A_2 = (5, 16) \text{ را محاسبه کنید}$$

$$P(A_1 \cup A_2), \quad P(A_1 \cap A_2)$$

۹. هرگاه $P(X) = \frac{x}{15}$, $x=1,2,3,4,5$ تابع احتمال X باشد می بیند

$$P(X=1 \text{ یا } X=2), P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2}\right), P(1 \leq X \leq 2)$$

۱۰. فرض کنید X دارای توزیع رولهای با پارامترهای $n=50$ و $p=\frac{1}{25}$ باشد.

الف) $P(X \leq 1)$ را بیابید.

ب) $P(X \leq 1)$ را با استفاده از تقریب پد آمدن بیابید.

۱۱. هرگاه X دارای توزیع رولهای با پارامترهای $n=2$, $p=0.5$ و Y دارای

توزیع رولهای با پارامترهای $n=4$, $p=0.5$ باشد و $P(X > 1) = \frac{5}{9}$ محاسبه کنید $P(Y > 1)$.

۱۲. هرگاه X دارای توزیع کینداخت $[2, 10]$ باشد، میانگین و واریانس X و $E((X+2)^3)$ را بیابید.

۱۳. هرگاه X دارای توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشد $P(|X| \leq 2)$ را بیابید.

۱۴. هرگاه X دارای توزیع $N(100, 75)$ باشد $P(X < 40)$ و $P(70 < X < 100)$ را بیابید.

۱۵. هرگاه X دارای توزیع $N(100, 2)$ باشد a را به گونه ای بیابید

$$P\left(-a < \frac{X-100}{\sqrt{2}} < a\right) = 0.9$$

۱۶. هرگاه X دارای توزیع $N(100, 2)$ باشد به گونه ای که

$$P(X < 94) = 0.95 \quad \text{و} \quad P(X < 109) = 0.9$$

مقادیر μ و σ^2 را به دست آورید.

$P(x, y)$	x				
	0	1	2	3	4
0	0.5	0.1	0.1	0.4	0.1
1	0.5	0.2	0.1	0.3	0.2
2	0.5	0.1	0.5	0.5	0.5

۱۸. فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال تدرام تحریف شده در

دول ردبر داشته باشند. الف) $P(X > 2, Y > 1)$ و $P(Y \leq 1)$ را بیابید.
 ب) تابع چگالی احتمال تدرام X_1 و X_2 را بیابید. ج) $P(Y=0 | X=0)$ را بیابید.
 د) آیا X و Y مستقل هستند؟ ه) $E(X-Y)$ را محاسبه کنید. و) ضریب همبستگی X و Y را بدست آورید. ز) تابع مولد تدرام X و Y را بدست آورید.

۱۹. هرگاه $0 < x_1 < x_2 < 1$ و $0 < x_2 < x_1 < 1$ در هر دو صورت $f(x_1, x_2) = c_1 / x_1 x_2$ (در صورت نقاط) و $f(x_1, x_2) = c_2 x_1^4 x_2^4$ (در صورت نقاط) آن گاه الف) c_1 و c_2 را بیابید.

ب) تابع چگالی احتمال تدرام X_1 و X_2 را بیابید. ج) $P(x_1 < \frac{1}{2}, x_2 < \frac{1}{2} | x_1 = \frac{5}{8}, x_2 = \frac{5}{8})$ را محاسبه کنید.
 د) $P(\frac{1}{8} < x_1 < \frac{1}{4})$ را محاسبه کنید.

۲۰. نشان دهید متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 با تابع چگالی احتمال تدرام زیر مستقل هستند:
 $f(x_1, x_2) = 0$ در نقاط $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ و $f(x_1, x_2) = 12 x_1 x_2 (1 - x_2)$ در نقاط $0 < x_1 < x_2 < 1$.

۲۱. نشان دهید متغیرهای تصادفی گسسته X_1 و X_2 با تابع احتمال تدرام زیر مستقل هستند:
 $P(x_1, x_2) = 0$ در نقاط $x_1 = 1, 2, 3, 4$ و $x_2 = 1, 2, 3, 4$ و $P(x_1, x_2) = 1/16$ در نقاط $x_1 = 1, 2, 3, 4$ و $x_2 = 1, 2, 3, 4$.

۲۲. هرگاه X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر λ باشد $P(\bar{X} > 1.5)$ را محاسبه کرده جواب خود را با تقریب نرمال مقایسه کنید.

۲۳. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_n یک نمونه تصادفی از توزیع $f(x) = 3x^2, 0 < x < 1$ باشد. در صورت نقاط $f(x) = 0$.

۲۴. حد مرکزی به طرد تقریبی محاسبه کنید. $P(0.16 < (\sum_{i=1}^{15} X_i) / 15 < 0.18)$ را با استفاده از قضیه حد مرکزی محاسبه کنید.

مسائل اضافی (آمار احتمال مهندسی)

۱- سرایداری یک دسته کلید ۸ تایی برای باز کردن در ۸ اتاق دارد که هر کلید تنها در یک اتاق را باز میکند. اگر در ۴۰٪ از این اتاق ها قفل نباشد و او ۳ کلید را به طور تصادفی همراه آورده باشد؛ احتمال اینکه او بتواند وارد اتاق شود را بیابید.

۲- یک آزمایشگاه تشخیص سرطان با احتمال ۵٪ برای بیماران غیر سرطانی پاسخ مثبت و با احتمال ۹۹٪ برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت میدهد. از بین بیماران یک بیمارستان که ۷٪ آنها سرطانی هستند بیماری را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش روی وی مثبت نشان داده شده است. احتمال اینکه بیمار سرطانی باشد چقدر است؟

۳- خانواده ای ۳ فرزند دارد. اگر فرزند اول و آخر از یک جنس باشند؛ احتمال همجنس بودن تمام فرزندان را بیابید.