به نام خدا

مسائل احتمال - سری ۱

۱. اگر پیشامدهای A و B مستقل با احتمال مثبت باشند نشان دهید $A\cap B\neq\Phi$.

۲. گزاره های زیر را ثابت و یا با یک مثال نقض کنید

الف) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد، E مستقل از $F\cup G$ است.

ب) اگر E مستقل از F و E مستقل از G باشد و $F\cap G=\Phi$، E مستقل از $F\cup G$ است.

ج) اگر E مستقل از F و F مستقل از G و E مستقل از $F\cap G$ باشد آنگاه G مستقل از $E\cap F$ است

۳. نشان دهید اگر $E_1,\dots,E_n$ مستقل باشند آنگاه

$$P(E_1\cup E_2\cup\dots\cup E_n)=1-[1-P(E_1)][1-P(E_2)]\cdots[1-P(E_n)]$$

۴. نشان دهید

$$P(E|F)=P(E|F\cap G)P(G|F)+P(E|F\cap G^c)P(G^c|F)$$

۵. فرض کنید که یک فضای نمونه باشد و $P(A)>0$ اگر $A\subset$ و $B\subset$ که. نشان دهید:

الف) از $B\subset A$ نتیجه می شود $P(B|A)=\frac{P(B)}{P(A)}$

ب) از $A\subset B$ نتیجه می شود $P(B|A)=1$

۶. کیسه ۱ شامل ۳ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و کیسه ۲ شامل ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. یک کیسه بطور تصادفی انتخاب و یک توپ از آن برداشته می شود.

الف) احتمال آنکه توپ قرمز باشد را محاسبه کنید

ب) با فرض اینکه توپ برداشته شده قرمز باشد احتمال شرطی که آن توپ از کیسه دوم باشد را محاسبه کنید.

به نام خدا

مسائل احتمال - سری ۲

۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $p(x)=c(\frac{2}{3})^x$ ، $x=1,2,\dots$ و در سایر نقاط صفر باشد. c را بیابید.

۲. هرگاه X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^2), & -1<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بیابید ب) تابع توزیع X را به دست آورید و با استفاده از آن $P(0<X<\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع زیر باشد میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور X و نیز $E(e^{2X+1})$ را محاسبه کنید.

$F(x)=0,\ x<-1$ ، $F(x)=\frac{1}{4},\ -1\le x<0$ ، $F(x)=\frac{3}{4},\ 0\le x<1$ ، $F(x)=1,\ x\ge 1$

۴. برای هر یک از توابع چگالی احتمال X در زیر $P(|X|<1)$ و $P(X^2<9)$ را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\frac{x^2}{18},\ -3<x<3$ (و صفر در سایر نقاط)

ب) $f(x)=\frac{x+2}{18},\ -2<x<4$ (و صفر در سایر نقاط)

۵. هرگاه $f(x)=\frac{1}{x^2}$ به ازای $1<x<\infty$ و صفر در سایر نقاط تابع چگالی احتمال X باشد و $A_1=(1,2)$ و $A_2=(4,5)$ محاسبه کنید

$P(A_1 \cup A_2)$ و $P(A_1 \cap A_2)$

۶. هرگاه $f(x)=2x$ ، $0<x<1$ (و صفر در سایر نقاط) تابع چگالی احتمال X باشد

الف) $E(\sqrt{X})$ را محاسبه کنید ب) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $Y=\sqrt{X}$ را به دست آورید ج) $E(Y)$ را محاسبه کنید و جواب خود را با جواب قسمت الف مقایسه کنید.

۷. هرگاه $x=1,2,3,4,5$ و $P(x)=\frac{x}{15}$ تابع احتمال X باشد محاسبه کنید

$P(X=1$ یا $X=2)$ و $P(\frac{1}{2}<X<\frac{5}{2})$ و $P(1\le X\le 2)$

۸. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=50$ و $p=\frac{1}{25}$ باشد.

الف) $P(X\le 1)$ را بیابید.

ب) $P(X\le 1)$ را با استفاده از تقریب پواسون بیابید.

۹. هرگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=2$ ، $p=\alpha$ و Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=4$ ، $p=\alpha$ باشد و $P(X\geq 1)=\frac{5}{9}$ محاسبه کنید $P(Y\geq 1)$.

۱۰. هرگاه X دارای توزیع یکنواخت $[2,10]$ باشد، میانگین و واریانس X و $E((X+2)^3)$ را بیابید.

۱۱. هرگاه X دارای توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشد $P(|X|\le 2)$ را بیابید.

۱۲. هرگاه X دارای توزیع $N(75,100)$ باشد $P(X<60)$ و $P(70<X<100)$ را بیابید.

۱۳. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد a را به گونه‌ای بیابید که $P(-a<\frac{X-\mu}{\sigma}<a)=0/9$.

۱۴. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد به گونه‌ای که

$P(X<89)=0/9$ و $P(X<94)=0/95$

مقادیر μ و σ^2 را به دست آورید.

۱۵- هرگاه $-1<x<2$ و $f(x)=\frac{1}{3}$ و $f(x)=0$ در سایر نقاط، تابع چگالی احتمال X باشد تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $Y=X^2$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: $P(X^2 \le y)$ را برای ۲ حالت $0 \le y < 1$ و $1 \le y < 4$ درنظر گیرید.

۱۶. اگر تغییر تصادفی گسسته X دارای تابع احتمال

$$p(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & , x=1,2,3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد تابع احتمال $Y=2X+1$ را به دست آورید.

۱۷. اگر تغییر تصادفی گسسته X دارای تابع احتمال $p(x)=(\frac{1}{2})^x$ ، $x=1,2,\ldots$ و $p(x)=0$ در سایر نقاط) باشد تابع احتمال $Y=X^3$ را به دست آورید.

۱۸. اگر X دارای تابع چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{9} & , 0<x<3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد تابع چگالی احتمال $Y=X^3$ را به دست آورید.

۱۹. اگر

$$f(x)=\begin{cases} 2x e^{-x^2} & , 0<x<\infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال تغییر تصادفی X باشد تابع چگالی احتمال $Y=X^2$ را به دست آورید.

۲۰. اگر X دارای توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ باشد و $Y=e^X$ ، میانگین و واریانس Y را به دست آورید.

به نام خدا

مسائل احتمال - سری ۳

	x				
$p(x,y)$	۰	۱	۲	۳	۴
y = ۰	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	۰/۰۴	۰/۰۱
۱	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۲
۲	۰/۰۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵

۱. فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال توأم $p(x,y)$ باشند. الف) $P(X>2, Y>1)$ و $P(Y\le 1)$ را بیابید. ب) توابع احتمال کناری X و Y را بیابید. ج) $P(Y=0 \mid X=0)$ را بیابید. د) تحقیق کنید آیا X و Y مستقل هستند یا خیر؟ هـ) $E(X-Y)$ و $E(XY)$ را بیابید. و) ضریب همبستگی X و Y را بیابید. ز) میانگین و واریانس شرطی X مشروط بر $Y=1$ را بیابید.

۲. هرگاه X_1 و X_2 دارای تابع چگالی احتمال توأم

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1+x_2 & 0<x_1<1,\ 0<x_2<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشند میانگین و واریانس شرطی X_2 مشروط بر $X_1=x_1$ را بیابید.

۳. اگر

$$f(x_1 \mid x_2)=\frac{c_1 x_1}{x_2^2},\quad 0<x_1<x_2,\ 0<x_2<1$$

و $f(x_1 \mid x_2)=0$ در سایر نقاط و $f_2(x_2)=c_2 x_2^4,\ 0<x_2<1$ ، $f_2(x_2)=0$ در سایر نقاط ، الف) c_1 و c_2 را بیابید. ب) تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_2 را بیابید. ج) $P(\frac{1}{4}<X_1<\frac{1}{2})$ را بیابید. د) $P(\frac{1}{4}<X_1<\frac{1}{2} \mid X_2=\frac{5}{8})$ را بیابید.

۴. اگر Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۷۲ و $\frac{1}{3}$ باشد $P(22\le Y\le 28)$ را تقریب بزنید.

۵. اگر Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۱۰۰ و $\frac{1}{2}$ باشد $P(Y=50)$ را تقریب بزنید.

۶. هرگاه $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر ۱ باشد $P(\bar{X}>1.5)$ را محاسبه نموده جواب حاصل را با تقریب نرمال مقایسه کنید.

۷. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد. با استفاده از قضیه حد مرکزی

$$P\left(0.6<\Big(\sum_{i=1}^{15} X_i\Big)/15<0.8\right)$$

را به طور تقریبی محاسبه کنید.

۸. اگر به ازای $(x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$،

$$p(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1 + x_2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2 - x_1 - x_2}$$

و $p(x_1, x_2) = 0$ در سایر نقاط، تابع احتمال توأم X_1 و X_2 باشد

تابع احتمال توأم $Y_1 = X_1 - X_2$ و $Y_2 = X_1 + X_2$ را بیابید.

۹. اگر X_1 و X_2 دارای تابع احتمال توأم

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{36} & x_1 = 1, 2, 3 ,\; x_2 = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد ابتدا تابع احتمال توأم $Y_1 = X_1 X_2$ و $Y_2 = X_2$ را به دست آورید و آن گاه تابع احتمال کناری Y_1 را به دست آورید.

۱۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته مستقل با تابع احتمال توأم $p_1(x_1)\, p_2(x_2), (x_1, x_2) \in \mathcal{A}$ باشند و $Y_1 = u_1(X_1)$ و $Y_2 = u_2(X_2)$ یک تطابق ۱-۱ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ تعریف کنند نشان دهید $Y_1 = u_1(X_1)$ و $Y_2 = u_2(X_2)$ مستقل هستند.

۱۱. فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. نشان دهید تابع چگالی احتمال کناری $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_2}$ کوشی است:

$$g_1(y_1) = \frac{1}{\pi(1 + y_1^2)} \qquad -\infty < y_1 < \infty$$

راهنمایی: قرار دهید $Y_2 = X_2$ و تابع چگالی احتمال X_2 را در $x_2 = 0$ مساوی صفر قرار دهید. آن گاه تابع چگالی احتمال توأم Y_1 و Y_2 را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونهٔ تصادفی اندازهٔ ۲ از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. قرار دهید $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ و تابع چگالی احتمال توأم Y_1، Y_2 را به دست آورید. آن گاه نشان دهید این متغیرهای تصادفی مستقل هستند.

به نام خدا

مسائل احتمال - سری ۲

۱. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع احتمال $P(x)=c\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ ، $x=1,2,\dots$ و ۰ در سایر نقاط باشد. c را بیابید.

۲. هرگاه X یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^2), & -1<x<1 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

الف) مقدار c را بیابید ب) تابع توزیع X را به دست آورید و با استفاده از آن $P(0<X<\frac{1}{2})$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع زیر باشد میانگین، واریانس و تابع مولد گشتاور X و نیز $E(e^{2X+1})$ را محاسبه کنید.

$F(x)=0,\ x<-1$ ، $F(x)=\frac{1}{4},\ -1\le x<0$ ، $F(x)=\frac{3}{4},\ 0\le x<1$ ، $F(x)=1,\ x\ge 1$

۴. برای هر یک از توابع چگالی احتمال X در زیر $P(|X|<1)$ و $P(X^2<9)$ را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\frac{x^2}{18},\ -3<x<3$ (۰ در سایر نقاط)

ب) $f(x)=\frac{x+2}{18},\ -2<x<4$ (۰ در سایر نقاط)

۵. هرگاه $f(x)=\frac{1}{x^2}$ به ازای $1<x<\infty$ و ۰ در سایر نقاط تابع چگالی احتمال X باشد، $A_1=(1,2)$ و $A_2=(3,5)$ محاسبه کنید

$P(A_1\cup A_2)$ و $P(A_1\cap A_2)$

۶. هرگاه $f(x)=2x,\ 0<x<1$ (۰ در سایر نقاط) تابع چگالی احتمال X باشد

الف) $E(\sqrt{X})$ را محاسبه کنید ب) تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $Y=\sqrt{X}$ را به دست آورید ج) $E(Y)$ را محاسبه کنید و جواب خود را با جواب قسمت الف مقایسه کنید.

۷. هرگاه $x=1,2,3,4,5$ ، $P(x) = \frac{x}{15}$ تابع احتمال X باشد محاسبه کنید

$P(X=1 \text{ یا } X=2)$ ، $P(\frac{1}{2} < X < \frac{5}{2})$ و $P(1 \leq X \leq 2)$

۸. فرض کنید X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=50$ و $p=\frac{1}{25}$ باشد.

الف) $P(X \leq 1)$ را بیابید.

ب) $P(X \leq 1)$ را با استفاده از تقریب پواسون بیابید.

۹. هرگاه X دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=2$ ، $p=\alpha$ و Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای $n=4$ ، $p=\alpha$ باشد و $P(X \geq 1) = \frac{5}{9}$ محاسبه کنید $P(Y \geq 1)$.

۱۰. هرگاه X دارای توزیع یکنواخت $[2,10]$ باشد، میانگین و واریانس X و $E((X+2)^3)$ را بیابید.

۱۱. هرگاه X دارای توزیع نمایی با پارامتر ۲ باشد $P(|X| \leq 2)$ را بیابید.

۱۲. هرگاه X دارای توزیع $N(75, 100)$ باشد $P(X < 70)$ و $P(70 < X < 100)$ را بیابید.

۱۳. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد a را به گونه‌ای بیابید که $P(-a < \frac{X-\mu}{\sigma} < a) = 0.9$.

۱۴. هرگاه X دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد به گونه‌ای که

$P(X < 89) = 0.9$ و $P(X < 94) = 0.95$

مقادیر μ و σ^2 را به دست آورید.

۱۵- هرگاه $-1 < x < 2$ و $f(x) = \frac{1}{3}$ و $f(x) = 0$ در سایر نقاط، تابع چگالی احتمال X باشد تابع توزیع و تابع چگالی احتمال $Y = X^2$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: $P(X^2 \le y)$ را برای ۲ حالت $0 \le y < 1$ و $1 \le y < 4$ درنظر گیرید.

۱۶. اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع احتمال

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 1,2,3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد تابع احتمال $Y = 2X + 1$ را به دست آورید.

۱۷. اگر متغیر تصادفی گسسته X دارای تابع احتمال $p(x) = (\frac{1}{2})^x$ ، $x = 1,2,\dots$ و $p(x) = 0$ در سایر نقاط) باشد تابع احتمال $Y = X^3$ را به دست آورید.

۱۸. اگر X دارای تابع چگالی احتمال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد تابع چگالی احتمال $Y = X^3$ را به دست آورید.

۱۹. اگر

$$f(x) = \begin{cases} 2x e^{-x^2}, & 0 < x < \infty \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X باشد تابع چگالی احتمال $Y = X^2$ را به دست آورید.

۲۰. اگر X دارای توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد و $Y = e^X$ ، میانگین و واریانس Y را به دست آورید.

به نام خدا

مسائل احتمال - سری ۳

$p(x,y)$	$x=0$	1	2	3	4
$y=0$	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱	۰/۰۴	۰/۰۱
1	۰/۰۵	۰/۲۰	۰/۱	۰/۰۳	۰/۰۲
2	۰/۰۵	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۰۵

۱. فرض کنید X و Y دارای تابع احتمال توأم $p(x,y)$ باشند. الف) $P(X>2, Y>1)$ و $P(Y\leq 1)$ را بیابید. ب) توابع احتمال کناری X و Y را بیابید. ج) $P(Y=0 \mid X=0)$ را بیابید. د) تحقیق کنید آیا X و Y مستقل هستند یا خیر؟ هـ) $E(XY)$ و $E(X-Y)$ را بیابید. و) ضریب همبستگی X و Y را بیابید. ز) میانگین و واریانس شرطی X مشروط بر $Y=1$ را بیابید.

۲. هرگاه X_1 و X_2 دارای تابع چگالی احتمال توأم

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1+x_2, & 0<x_1<1,\ 0<x_2<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشند میانگین و واریانس شرطی X_2 مشروط بر $X_1=x_1$ را بیابید.

۳. اگر $f(x_1 \mid x_2)=\dfrac{c_1 x_1}{x_2^2}$ ، $0<x_1<x_2$ ، $0<x_2<1$ و $f(x_1\mid x_2)=0$ در سایر نقاط و $f_2(x_2)=c_2 x_2^4$ ، $0<x_2<1$ ، $f_2(x_2)=0$ در سایر نقاط، الف) c_1 و c_2 را بیابید. ب) تابع چگالی احتمال توأم X_1 و X_2 را بیابید. ج) $P(\frac{1}{4}<X_1<\frac{1}{2})$ را بیابید. د) $P(\frac{1}{4}<X_1<\frac{1}{2} \mid X_2=\frac{5}{8})$ را بیابید.

۴. اگر Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۷۲ و $\frac{1}{3}$ باشد $P(22\leq Y\leq 28)$ را تقریب بزنید.

۵. اگر Y دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۱۰۰ و $\frac{1}{2}$ باشد $P(Y=50)$ را تقریب بزنید.

۶. هرگاه $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر ۱ باشد $P(\bar{X}>1.5)$ را محاسبه نموده جواب حدود را با تقریب نرمال مقایسه کنید.

۷. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_{15}$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2 & 0<x<1 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد. با استفاده از قضیه حد مرکزی

$$P\left(0.6<\left(\sum_{i=1}^{15} X_i\right)/15<0.8\right)$$

را به طور تقریبی محاسبه کنید.

۸. اگر به ازای $(x_1, x_2) = (0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$،

$$p(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{3}\right)^{x_1 + x_2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2 - x_1 - x_2}$$

و $p(x_1, x_2) = 0$ در سایر نقاط، تابع احتمال توأم X_1 و X_2 باشد

تابع احتمال توأم $Y_1 = X_1 - X_2$ و $Y_2 = X_1 + X_2$ را بیابید.

۹. اگر X_1 و X_2 دارای تابع احتمال توأم

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2}{36} & x_1 = 1,2,3 \ ,\ x_2 = 1,2,3 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

باشد ابتدا تابع احتمال توأم $Y_1 = X_1 X_2$ و $Y_2 = X_2$ را به دست آورید و آن گاه تابع احتمال کناری Y_1 را به دست آورید.

۱۰. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی گسسته مستقل با تابع احتمال توأم $p_1(x_1)\, p_2(x_2)$، $(x_1, x_2) \in \mathcal{A}$ باشند و $Y_1 = u_1(X_1)$ و $Y_2 = u_2(X_2)$ یک تطابق ۱-۱ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ تعریف کند نشان دهید $Y_1 = u_1(X_1)$ و $Y_2 = u_2(X_2)$ مستقل هستند.

۱۱. فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(0,1)$ باشد. نشان دهید تابع چگالی احتمال کناری $Y_1 = \dfrac{X_1}{X_2}$ کوشی است:

$$g_1(y_1) = \frac{1}{\pi(1+y_1^2)}$$

$-\infty < y_1 < \infty$

راهنمایی: قرار دهید $Y_2 = X_2$ و تابع چگالی احتمال X_2 را در $x_2 = 0$ مساوی صفر قرار دهید. آن گاه تابع چگالی احتمال توأم Y_1 و Y_2 را به دست آورید.

۱۲. فرض کنید X_1 و X_2 یک نمونهٔ تصادفی اندازهٔ ۲ از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد. قرار دهید $Y_1 = X_1 + X_2$ و $Y_2 = X_1 - X_2$ و تابع چگالی احتمال توأم Y_1 و Y_2 را به دست آورید. آن گاه نشان دهید این متغیرهای تصادفی مستقل هستند.