بسمه تعالی

سری اول تمرینات درس مبانی ماتریس ها و جبر خطی

۱) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای ماتریس ها هستند؟ پاسخ خود را با ذکر دلیل بیان کنید.

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \{A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^{n} a_{1i}=0\} \\
(ii) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid (x_1,x_2,\cdots,x_n)A=0\} \\
(iii) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A)=1\} \\
(iv) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid 3A^2+A-5I=0\} \\
(v) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid tr(A)=4det(A)\}; \quad (tr[a_{ij}]:=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}) \\
(vi) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid A=A^T\} \\
(vii) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid A+A^T=0\} \\
(viii) & \{A\in M_n(\mathbb{R}) \mid A^2=0\} \\
(ix) & \{B\in M_n(\mathbb{R}) \mid AB=BA\}; \quad (A\in M_n(\mathbb{R})\ is\ fixed.) \\
(x) & \{A\in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid A^TJA=J\}; \quad J=\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \\
(xi) & \{A\in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid JA+A^TJ=0\} \\
(xii) & \{(a_n)\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_n=a_{n-1}+a_{n-2}, n\geq 3\}.
\end{array}
$$

۲) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای توابع حقیقی هستند؟ چرا؟

$$
\begin{array}{ll}
(i) & \{y=f(x) \mid f(1)=0\} \\
(ii) & \{y=f(x) \mid f''(x)+xf(x)=0\} \\
(iii) & \{y=f(x) \mid f'(x)=1+2f(x)\} \\
(iv) & \{y=f(x) \mid f(x)=-f(x)\ \forall\, x\in\mathbb{R}\} \\
(v) & \{y=f(x) \mid \int_0^1 f(x)dx=0\} \\
(vi) & \{p(x)\in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x)=-p(x)\} \\
(vii) & \{p(x)\in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x)=2p(x)\} \\
(viii) & \{p(x)\in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(0)=0\}.
\end{array}
$$

۳) ماتریس R تحویل شده سطری پلکانی نظیر A را بدست آورید هرگاه

$$
A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.
$$

۴) فرم ماتریس های $n\times n$ مانند A را مشخص کنید به طوری که $e_{12}A=Ae_{12}$ که در آن e_{12} ماتریسی است که تمام درایه های آن صفرند بجز درایه $(1,2)$ آن که برابر با یک است.

۵) وارون ماتریس های زیر را در صورت وجود بیابید:

$$(i)\quad \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix} \qquad (ii)\quad \begin{bmatrix} ۲ & ۲ & ۴ & -۶ \\ ۴ & -۶ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ & -۲ & ۳ \\ ۲ & -۳ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

۶) نشان دهید که اگر $U^۲ = I$ و $I + U$ وارون پذیر باشد، آنگاه $U = I$.

۷) ماتریس مربعی E را خودتوان گوئیم، هرگاه $E^۲ = E$. نشان دهید که
(الف) تنها ماتریس خودتوان وارون پذیر، ماتریس همانی است.
(ب) اگر ماتریس A خودتوان باشد، آنگاه ماتریس $I - ۲A$ وارون پذیر است.