آمار و احتمال مهندسی (پایان ترم - سری اول)

تمرین آمار ریاضی (سری اول)

۱. هرگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x)$ باشد برآوردکننده درستنمایی ماکسیمم θ و نیز برآوردکننده گشتاوری θ را در هر یک از حالات زیر بدست آورید:

الف) $f_\theta(x) = \theta^x e^{-\theta} / x!$ ، $x = 0, 1, 2, \ldots$ ، $\theta > 0$

ب) $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$ ، $0 < x < 1$ ، $\theta > 0$ (در سایر نقاط $f_\theta(x) = 0$)

ج) $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ ، $0 < x < \infty$ ، $0 < \theta < \infty$

د) $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}$ ، $\theta \le x < \infty$ ، $-\infty < \theta < \infty$

۲. فرض کنید $X_1, \ldots, X_{20}$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(\mu, 80)$ باشد. هرگاه $\bar{x} = 81.2$ یک بازه اطمینان 0.95 برای μ بدست آورید.

۳. فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, 9)$ باشد. n را بنحوی بیابید که به طور تقریبی $P(\bar{X} - 1 < \mu < \bar{X} + 1) = 0.9$.

۴. فرض کنید $X_1, \ldots, X_{17}$ یک نمونه تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد که $\bar{x} = 4.7$ و $s^2 = 5.76$. یک بازه اطمینان ۹۰ درصد برای μ بدست آورید.

۵. دو نمونه تصادفی مستقل هر یک از اندازه ۱۰ و از توزیع های $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ مقادیر $\bar{x} = 4.8$ ، $s_1^2 = 8.64$ ، $\bar{y} = 5.6$ و $s_2^2 = 7.88$ را بدست می دهد. یک بازه اطمینان ۹۵ درصد برای $\mu_1 - \mu_2$ بدست آورید.

۶. فرض کنید $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ میانگین های دو نمونه تصادفی مستقل، هر یک از اندازه n، از توزیع های به ترتیب $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ باشند که در آن σ^2 معلوم است. n را بنحوی بیابید که

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} - \frac{\sigma}{5} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \frac{\sigma}{5}\right) = 0.9$$

۷. هرگاه ۸٫۴ ، ۷٫۹ ، ۸٫۳ ، ۶٫۴ ، ۸٫۴ ، ۹٫۸ ، ۷٫۲ ، ۷٫۸ و ۷٫۵ مقادیر مشاهده شده یک نمونه تصادفی اندازه ۹ از توزیع $N(8, \sigma^2)$ باشد یک بازه اطمینان ۹۰ درصد برای σ^2 بیابید.

۸. مقادیر به دست آمده برای میانگین و واریانس یک نمونه تصادفی اندازه ۱۵ از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ به ترتیب $\bar{x} = 3.2$ و $s^2 = 4.24$ هستند. یک بازه اطمینان ۹۰ درصد برای σ^2 به دست آورید.

۹. فرض کنید دو نمونه تصادفی مستقل به اندازه های $n = 16$ و $m = 10$ از دو توزیع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ به ترتیب مقادیر $\bar{x} = 3.6$ ، $s_1^2 = 4.14$ و $\bar{y} = 13.6$ و $s_2^2 = 7.26$ را برای میانگین و واریانس نمونه های تصادفی به دست دهد. یک بازه اطمینان ۹۰ درصد را برای σ_1^2/σ_2^2 بیابید هرگاه μ_1 و μ_2 مجهول باشند.

۱۰. فرض کنید S_1^2 و S_2^2 به ترتیب واریانس های نمونه های تصادفی اندازه های n و m از دو توزیع $N(\mu_1, \sigma^2)$ و $N(\mu_2, \sigma^2)$ باشند. از اینکه $\frac{1}{\sigma^2}(nS_1^2 + mS_2^2)$ دارای توزیع χ^2 با $n+m-2$ درجه آزادی است استفاده نموده تا یک بازه اطمینان برای σ^2 بیابید.