باسمه تعالی

تاریخ: ۱۶ دی ۱۳۹۵

آزمون پایان ترم درس ریاضی ۳ عمومی

زمان: ۲ ساعت و ۳۰ دقیقه

---

۱. حجم ناحیه محصور درون کره به مرکز $(۰,۰,۱)$ و شعاع ۱ و زیر مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ را بدست آورید. (۲۰ نمره)

۲. با استفاده از تغییر متغیر کروی مقدار انتگرال سه گانه $\iiint_V \left(\frac{۱}{\sqrt{x^۲+y^۲}}+\frac{۲z}{x^۲+y^۲+z^۲}\right) dxdydz$ را محاسبه کنید که V ناحیه محصور زیر رویه $z=۲-\sqrt{x^۲+y^۲}$ و بالای رویه $z=\sqrt{۳(x^۲+y^۲)}$ است. (۲۰ نمره)

۳. مقدار انتگرال منحنی الخط $\int_C (x^۲+y^۲)\, ds$ را در هر یک از دو حالت زیر حساب کنید.

الف) منحنی C در صفحه، بخشی از دایره به مرکز $(۲,۲)$ و شعاع ۲ از نقطه $A=(۴,۲)$ به نقطه $B=(۲,۰)$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است. (۱۰ نمره)

ب) منحنی C در صفحه، خط مستقیم از نقطه B به نقطه A است. (۱۰ نمره)

۴. یک هواپیما مسیری را در طول منحنی C به معادله $r(t)=(e^t,t,۲\sqrt{۲}e^{\frac{t}{۲}})$ از نقطه $A=(۱,۰,۲\sqrt{۲})$ به نقطه $B=(e^۲,۲,۲\sqrt{۲}e)$ طی می‌کند (مختصات نقاط بر حسب کیلومتر نسبت به مبدا مختصات است). اگر نرخ مصرف سوخت هواپیما در هر نقطه (x,y,z) برابر $xz^۲$ (لیتر در کیلومتر) باشد، مقدار مصرف سوخت هواپیما از نقطه A به نقطه B را محاسبه کنید. (۲۰ نمره)

۵. مساحت بخشی از رویه $z=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)$ که زیر رویه $z=۲\sqrt{x^۲+y^۲}$ است را بدست آورید. (۲۰ نمره)

۶. مقدار انتگرال سطح $\iint_S y\sqrt{۱-z}\, d\sigma$ را بدست آورید که S بخشی از سطح رویه $z=۱-x^۲$ محصور به صفحات $z=۰$، $y=۰$ و $y=۲$ است. (۲۰ نمره)

موفق باشید

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... **شماره دانشجوئی:** .... **نام درس:** ....

گروه درس: .... **نام استاد:** .... **تاریخ:** .... **نمره:** ....

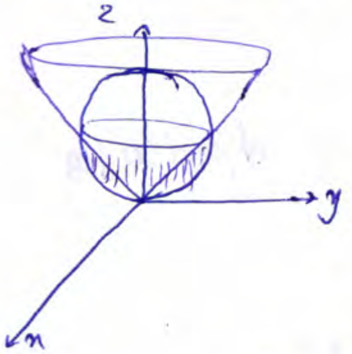
۹۵/۱۰/۱۶

« باسمه تعالی »

راه حل آزمون پایان ترم ریاضی عمومی ۳

ترم ۱-۱۳۹۵

۱- حجم ناحیه محصور درون کره به مرکز $(0,0,1)$ و شعاع ۱ و زیر مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ را بدست آورید.



راه حل:

مخروط $\rightarrow z=\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow{\text{دستگاه کروی}} \varphi=\frac{\pi}{4}$

کره $\rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1 \xrightarrow{\text{دستگاه کروی}} \rho=2\cos\varphi$

ناحیه V در دستگاه کروی $= \begin{cases} 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi \\ \frac{\pi}{4}\leqslant \varphi\leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0\leqslant \rho\leqslant 2\cos\varphi \end{cases}$

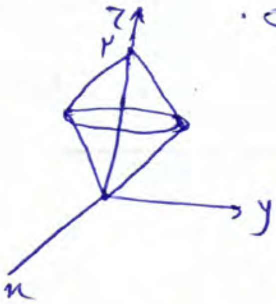
حجم ناحیه V $= \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\varphi} \rho^2\sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\varphi \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{3}\cos^4\varphi\right)\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\, d\theta = \frac{\pi}{3}.$$

۲- مقدار انتگرال سه گانه $I=\iiint_V \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)dx\,dy\,dz$ را بدست آورید که V ناحیه محصور بین

رویه $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ و بالای رویه $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ است.



V

$$z=2-\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow \rho\cos\varphi = 2-\rho\sin\varphi \Rightarrow \rho=\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}$$

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \longrightarrow \rho\cos\varphi=\sqrt{3}\,\rho\sin\varphi \Rightarrow \tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$$

ناحیه V در مختصات کر

$$\begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{6} \\ 0\leq\rho\leq\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}\end{cases}$$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}}\left(\frac{1}{\rho\sin\varphi}+\frac{2\rho\cos\varphi}{\rho^2}\right)\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}}\rho\,(1+2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}\right)^2(1+2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi+2\sin\varphi\cos\varphi}\times(1+2\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi\,d\theta$$

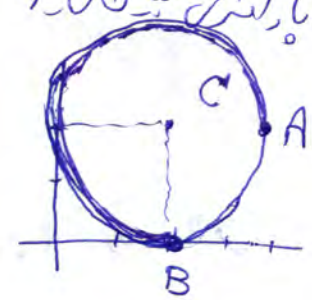
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\,d\varphi\,d\theta=2\pi\times\frac{\pi}{6}\times 2=\frac{2\pi^2}{3}.$$

۳- مقدار انتگرال منحنی الخط $I=\int_C (x^2+y^2)\,ds$ را در هر یک از دو حالت زیر محاسبه کنید

الف) C بخش از دایره به مرکز (۲,۲) و شعاع ۲ از نقطه A (۴,۲) به نقطه B (۲,۰) در جهت خلاف عقربه ساعت است.

ب) C در قطعه خط مستقیم از نقطه B به نقطه A است.

حل، الف) ابتدا منحنی C را به صورت پارامتری بیان می‌کنیم



$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

$$r(t)=\begin{cases} x(t)=2\cos t+2 \\ y(t)=2\sin t+2 \end{cases}$$

$$r'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t)$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\|=\sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)}=2$$

$$t=0 \rightarrow (x,y)=(4,2)=A$$
$$t=\frac{3\pi}{4} \rightarrow (x,y)=(2,0)=B \quad \Rightarrow \quad 0\le t\le \frac{3\pi}{4}$$

$$I=\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt=\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left((2\cos t+2)^2+(2\sin t+2)^2\right)\times 2\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{4}} 8\left(\cos^2 t+1+2\cos t+\sin^2 t+1+2\sin t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{3\pi}{4}} 8\left(3+2\cos t+2\sin t\right)dt$$

$$=24t+16\sin t-16\cos t\Big]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$=24\times\frac{3\pi}{4}-16-16\times 0$$

$$=18\pi-16.$$

ب) معادله پارامتری خط مستقیم از B به A.

$$r(t)=\begin{cases} x(t)=2t+2 \\ y(t)=2t \end{cases} \quad 0\le t\le 1 \quad \Rightarrow \quad r'(t)=(2,2) \Rightarrow \|r'(t)\|=2\sqrt{2}$$

$$I=\int_0^1 f(r(t))\,\|r'(t)\|\,dt=\int_0^1 2\sqrt{2}\left((2t+2)^2+4t^2\right)dt=8\sqrt{2}\int_0^1 2t^2+2t+1\,dt$$

$$=8\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}t^3+t^2+t\right)=8\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{64\sqrt{2}}{3}$$

(٤)

$$r(t)=\left(e^{t},\ t,\ 2\sqrt{2}\,e^{\frac{t}{2}}\right)$$

$$A=(1,0,2\sqrt{2}) \rightarrow t_1=0$$

$$B=(e^{2},2,2\sqrt{2}e) \rightarrow t_2=2$$

$$r'(t)=\left(e^{t},\ 1,\ \sqrt{2}\,e^{\frac{t}{2}}\right) \Rightarrow \|r'(t)\|=\sqrt{e^{2t}+1+2e^{t}}=\sqrt{(e^{t}+1)^{2}}=e^{t}+1$$

اگر مسیر منحنی C باشد، مقدار مصرف سوخت برابر $I=\int_C xz^2\,ds$ است $= I=\int_0^2 f(r(t))\|r'(t)\|dt$

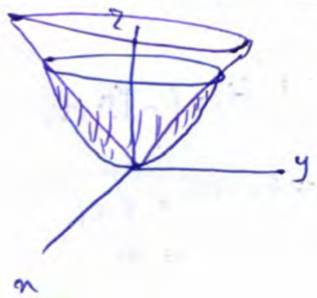
$$I=\int_0^2 (e^{t}\times 8e^{t})(e^{t}+1)\,dt=\int_0^2 (8e^{3t}+8e^{2t})\,dt$$

$$=\frac{8}{3}e^{3t}+4e^{2t}\Big]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}e^{6}+4e^{4}-\frac{8}{3}-4$$

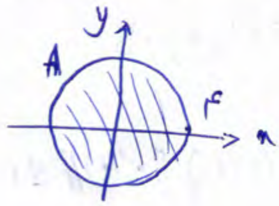
---

(۵)



تلاقی دو رویه $\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=4 \rightarrow$ مقطع دایره



تصویر در صفحه xoy

$$\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 4\end{cases}$$

$$z=g(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$$

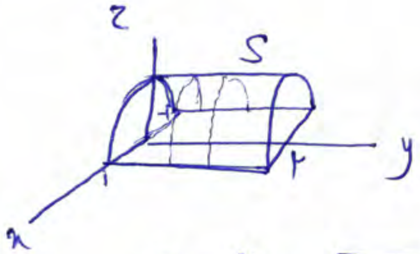
مساحت $=\int_S d\sigma=\iint_A \sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$

$\frac{\partial g}{\partial x}=x,\ \frac{\partial g}{\partial y}=y \Rightarrow$ مساحت $=\iint_A \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{4} r\sqrt{1+r^2}\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^4\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{17^3}}{3}-\frac{1}{3}\right)d\theta=\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{17^3}-1\right)$$



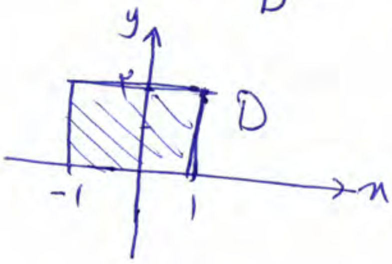
$z = g(x,y) = 1 - x^2$

$$I = \iint_S y\sqrt{1-z}\, d\sigma = \iint_D \left(y\sqrt{1-(1-x^2)}\right)\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\, dA$$

$\frac{\partial g}{\partial x} = -2x,\ \frac{\partial g}{\partial y} = 0$

$$= \iint_D y\sqrt{x^2} \times \sqrt{1+4x^2}\, dx\,dy$$

$D: \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$



تصویر S درصفحه xoy

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} y|x|\sqrt{1+4x^2}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}|x|\sqrt{1+4x^2}\Big]_0^2\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} 2|x|\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= 4\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\, dx$$

$$= 4 \times \frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{5^3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{5^3}-1\right)$$