بسمه تعالی

معادلات دیفرانسیل

۹۶/۰۸/۳۰ **امتحان میان ترم** وقت : ۱۴۵ دقیقه

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام مدرس:

---

۱. [۲۰ نمره] معادله دیفرانسیل $y' = y(y-۲)(y+۲)$ را در نظر بگیرید.

الف) نقاط تعادل و نوع پایداری آنها را تعیین و نمای فاز آنرا رسم کنید.

ب) نمودار جواب را در صفحه ty به ازای $y(۰)$ های متفاوت رسم کنید (همراه با استدلال کامل).

۲. [۲۰ نمره] جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید.

$$\left(\frac{\sin y}{y} - \frac{۱}{x}\right) dx + \left(x\frac{\cos y}{y} - \frac{\ln x}{y}\right) dy = ۰$$

۳. [۳۰ نمره] جواب عمومی معادله زیر را بدست آورید:

$$t^{۲}y'' - ۳ty' + ۵y = ۰ \quad t > ۰.$$

ب) فرم کلی یک جواب خصوصی معادله زیر را بدست آورید. (محاسبه ضرائب لازم نیست)

$$y'' + ۲y' + ۵y = ۳te^{-t}\cos^{۲} t + ۴$$

۴. [۳۰ نمره] الف) جواب دستگاه معادلات زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰) = \mathbf{x}_۰$$

ب) جواب دستگاه غیرهمگن زیر را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sec t \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{۲} < t < \frac{\pi}{۲}$$

ج) نمای فاز دستگاه قسمت (الف) را رسم کنید. (اختیاری)

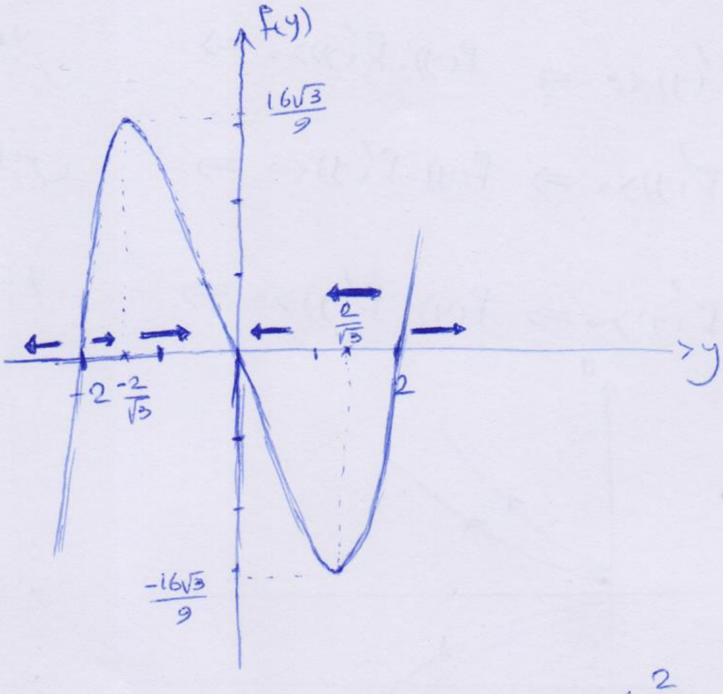
موفق باشید

پاسخ سؤال ۱

الف)

$$f(y)=y(y-2)(y+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \\ y=-2 \end{cases}$$: نقاط تعادل

(۷ نمره)



if $y<-2$: $f(y)<0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}<0$

if $-2<y<-\frac{2}{\sqrt{3}}$: $f(y)>0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}>0$

if $\frac{-2}{\sqrt{3}}<y<0$: $f(y)>0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}>0$

$0<y<\frac{2}{\sqrt{3}}$: $f(y)<0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}<0$

$\frac{2}{\sqrt{3}}<y<2$: $f(y)<0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}<0$

$y>2$: $f(y)>0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}>0$

پس نقطه تعادل $y=0$ مجانبی پایدار و نقاط تعادل $y=\pm 2$ ناپایدارند.

خط فاز:

(۳ نمره)

ب)

(5 نمره)

$y<-2 \quad : \quad f(y)<0 \;\text{و}\; f'(y)>0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)<0 \Rightarrow$ تقعر به سمت پایین

$-2<y<-\frac{2}{\sqrt{3}} \quad : \quad f(y)>0,\; f'(y)>0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)>0 \Rightarrow$ تقعر به سمت بالا

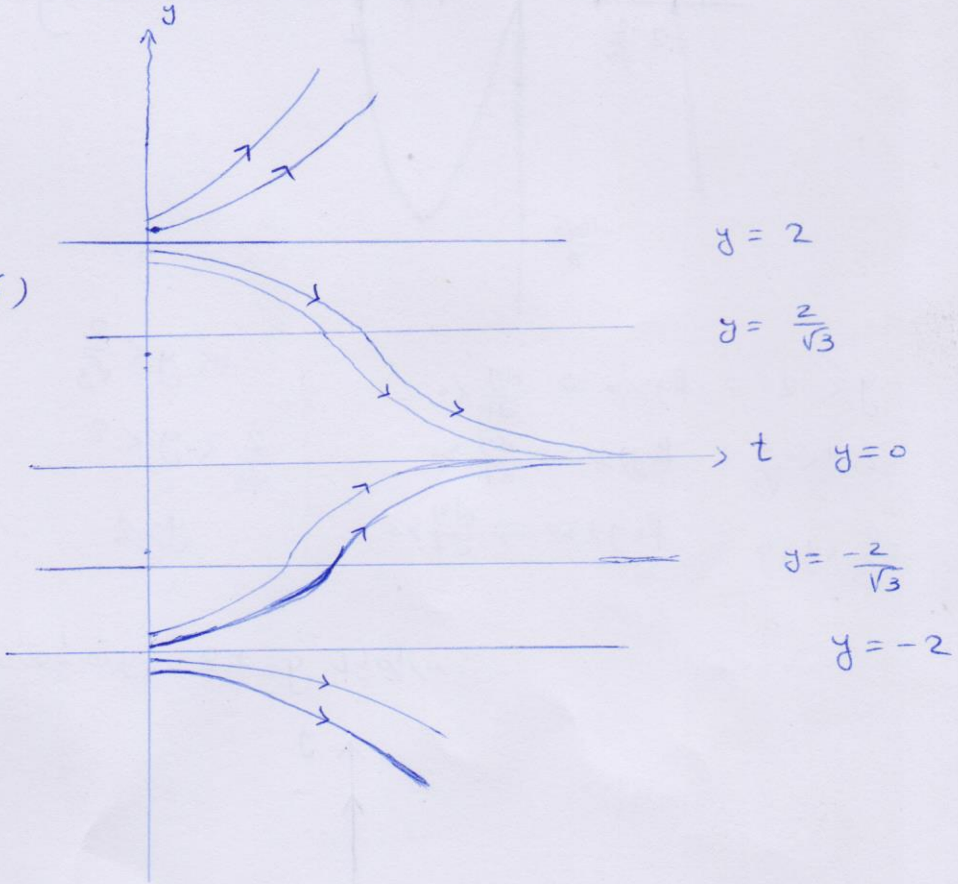
$-\frac{2}{\sqrt{3}}<y<0 \quad : \quad f(y)>0,\; f'(y)<0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)<0 \Rightarrow$ تقعر به سمت پایین

$0<y<\frac{2}{\sqrt{3}} \quad : \quad f(y)<0,\; f'(y)<0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)>0 \Rightarrow$ تقعر به سمت بالا

$\frac{2}{\sqrt{3}}<y<2 \quad : \quad f(y)<0,\; f'(y)>0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)<0 \Rightarrow$ تقعر به سمت پایین

$y>2 \quad : \quad f(y)>0,\; f'(y)>0 \Rightarrow f(y)\cdot f'(y)>0 \Rightarrow$ تقعر به سمت بالا

(5 نمره)



۱) جواب سوال ۲ و بارم بندی آن:

$$M = \frac{\sin y}{y} - \frac{۱}{x},\quad N = x\frac{\cos y}{y} - \frac{\ln x}{y} \Longrightarrow R(y) = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{\frac{\cos y}{y} - \frac{\sin y}{y^۲} - \frac{\cos y}{y} + \frac{۱}{xy}}{\frac{۱}{x} - \frac{\sin y}{y}} = \frac{۱}{y}$$ ۵

$$\Longrightarrow \mu(y) = e^{\int R(y)dy} = e^{\int \frac{۱}{y}dy} = e^{\ln y} = y.$$ ۵

$$(\sin y - \frac{y}{x})dx + (x\cos y - \ln x)dy = ۰ \Longrightarrow d(x\sin y - y\ln x) = ۰ \Longrightarrow x\sin y - y\ln x = C.$$ ۵

۵

---

۲) جواب سوال ۳ قسمت الف:

$$x = \ln t \Longrightarrow y''(x) - ۴y'(x) + ۵y(x) = ۰,\ x \in \mathbb{R}.$$ ۳

$$y(x) = e^{rx} \Longrightarrow r^۲ - ۴r + ۵ = ۰ \Longrightarrow r = ۲ \pm i$$ ۲

$$\Longrightarrow e^{rx} = e^{(۲\pm i)x} = e^{۲x}\cos x \pm ie^{۲x}\sin x$$

$$\Longrightarrow y_۱ = e^{۲x}\cos x = e^{۲\ln t}\cos(\ln t) = t^۲\cos(\ln t),\quad y_۲ = e^{۲x}\sin x = e^{۲\ln t}\sin(\ln t) = t^۲\sin(\ln t)$$ ۴

$$\Longrightarrow y = c_۱y_۱ + c_۲y_۲ = t^۲(c_۱\cos(\ln t) + c_۲\sin(\ln t)).$$ ۱

جواب سوال ۳ قسمت ب:

$$y'' + ۲y' + ۵y = ۰ \Longrightarrow r^۲ + ۲r + ۵ = ۰ \Longrightarrow r = -۱ \pm ۲i.$$ ۳

$$g(t) = ۳te^{-t}\cos^۲ t + ۴ = ۳te^{-t}\frac{۱ + \cos ۲t}{۲} + ۴ = ۴ + \frac{۳}{۲}te^{-t} + \frac{۳}{۲}te^{-t}\cos(۲t).$$ ۲

$$g_۱(t) = ۴ \Longrightarrow y_{p_۱} = \frac{۴}{۵},$$ ۲

$$g_۲(t) = \frac{۳}{۲}te^{-t} \Longrightarrow y_{p_۲} = (A_۰ + A_۱t)e^{-t},$$ ۳

$$g_۳(t) = \frac{۳}{۲}te^{-t}\cos(۲t) \Longrightarrow y_{p_۳} = te^{-t}[(B_۰ + B_۱t)\cos ۲t + (C_۰ + C_۱t)\sin ۲t].$$ ۶

$$\Longrightarrow y_p = y_{p_۱} + y_{p_۲} + y_{p_۳} = \frac{۴}{۵} + (A_۰ + A_۱t)e^{-t} + te^{-t}[(B_۰ + B_۱t)\cos ۲t + (C_۰ + C_۱t)\sin ۲t].$$ ۴

بسمه تعالی

پاسخ پاسخ به سوال ۴ امتحان میان ترم

۹۶/۰۸/۳۰

۴. [۳۰ نمره] الف) جواب دستگاه معادلات زیر را بدست آورید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(۰) = \mathbf{x}_۰$$

ب) جواب دستگاه غیرهمگن زیر را بیابید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & -۳ \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \sec t \\ ۰ \end{pmatrix}, \quad -\frac{\pi}{۲} < t < \frac{\pi}{۲}$$

ج) نمای فاز دستگاه قسمت (الف) را رسم کنید. (اختیاری)

پاسخ: الف) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ را بدست می‌آوریم. $trA = 0$ و $\det A = 1$. بنابراین (۱۸ نمره)

$\lambda_{1,2} = \pm i$ مقادیر ویژه A هستند. سپس بردار ویژه نظیر i را بدست می‌آوریم. $(A - iI)V = 0$. در این صورت (۳ نمره)

داریم $2V_1 - (3+i)V_2 = 0$. پس $V = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (۴ نمره) یک بردار ویژه نظیر i است. لذا قرار می‌دهیم

$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. بنابراین $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ (۴ نمره). در این صورت (*) $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (۲ نمره) می‌دانیم

$e^{Bt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ (۲ نمره). با استفاده از (*) داریم (۴ نمره)

$$e^{At} = Pe^{Bt}P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t & -5\sin t \\ 2\sin t & \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$$

لذا جواب معادله همگن عبارت است از (۱ نمره)

$$e^{At}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} \cos t + 3\sin t \\ 2\sin t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -5\sin t \\ \cos t - 3\sin t \end{pmatrix}$$

ب) هرگاه قرار دهیم $G(t) = \begin{pmatrix} \sec t \\ 0 \end{pmatrix}$، آن گاه با استفاده از روش تغییر پارامتر (۱۲ نمره)

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-As}G(s)ds$$ (۳ نمره)

اما $e^{-As}G(s) = \begin{pmatrix} 1 + 3\tan s \\ 2\tan s \end{pmatrix}$ (۴ نمره). بنابراین

$$\int_0^t e^{-As}G(s)ds = \begin{pmatrix} t + 3\ln|\sec t| \\ 2\ln|\sec t| \end{pmatrix}$$ (۲ نمره)

پس

$$x(t) = e^{At}x_0 + \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t\ln|\sec t| \\ 2t\sin t - \sin t\ln|\sec t| \end{pmatrix}$$ (۳ نمره)

که $e^{At}x_0$ جواب معادله همگن است که در قسمت (الف) تعیین شد.

ج) با توجه به اینکه $trA=0$ و $detA=1>0$ ، مبدا یک نقطه مرکز است. لذا نمای فاز دستگاه

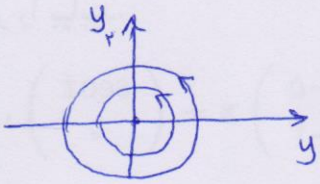
(۵ نمره)

از خانواده ای از منحنی های بسته تشکیل شده است که مبدا را احاطه کرده است. (۲ نمره) برای رسم نمای فاز

دقت می کنیم که هرگاه $X=PY$ که در آن $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ ، $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ ، آنگاه دستگاه

$X'=AY$ تبدیل می شود به $Y'=P^{-1}APY=BY$. اما ماتریس B به فرم

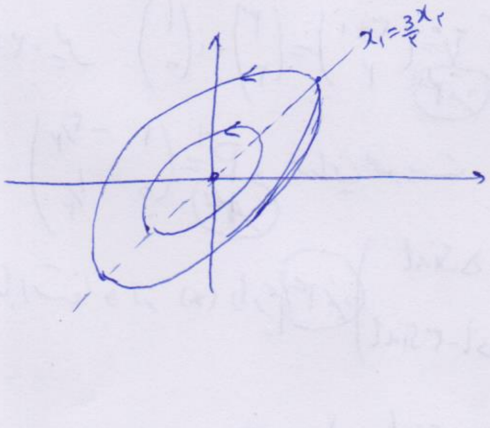
متعارف $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ است و نمای فاز آن از دوایر $y_1^2+y_2^2=c$ تشکیل شده است



(۳ نمره)

اما $Y=P^{-1}X$. بنابراین $y_1=x_1-\frac{3}{2}x_2$ ، $y_2=\frac{1}{2}x_2$

لذا نمای فاز دستگاه $X'=AX$ شامل بیضی های $(x_1-\frac{3}{2}x_2)^2+\frac{1}{4}x_2^2=c$ است



(۱ نمره)