بسمه تعالی

معادلات دیفرانسیل

پاسخ سوال ۱

۱. [۳۰ نمره] جواب دستگاه غیرهمگن زیر را بیابید.

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} ۵ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathrm{e}^{۲t} \begin{pmatrix} t \\ ۱ \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix}$$

۳ نمره

جواب: قرار دهید

$$\lambda_{۱,۲} = ۲ \text{ و } ۲ \leftarrow \det A = -۵+۹ = ۴ ,\ trA = ۴ \Leftarrow A = \begin{pmatrix} ۵ & -۳ \\ ۳ & -۱ \end{pmatrix}$$

بردار ویژه متناظر مقدار ویژه ۲:

$$(A-۲I)V = \begin{pmatrix} ۳ & -۳ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_۱ \\ V_۲ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ ۰ \end{pmatrix} \rightarrow ۳V_۱ - ۳V_۲ = ۰$$

$$\Rightarrow V^{(۱)} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}$$ ۳ نمره

بردار ویژه تعمیم یافته:

$$(A-۲I)\, V^{(۲)} = V^{(۱)} \rightarrow ۳V_۱ - ۳V_۲ = ۱ \xrightarrow{V_۲ = ۰} V_۱ = \frac{۱}{۳} \rightarrow V^{(۲)} = \begin{pmatrix} ۱/۳ \\ ۰ \end{pmatrix}$$ ۳ نمره

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad P^{-۱} = -۳ \begin{pmatrix} ۰ & -۱/۳ \\ -۱ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}.$$ ۲ نمره

$$\Rightarrow P^{-۱}AP = \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} = B \Rightarrow e^{Bt} = e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}, \quad e^{At} = Pe^{Bt}P^{-۱} = e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix}$$

۲ نمره ۳ نمره

$$= e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱ & \frac{۱}{۳} \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ۳t & ۱-۳t \\ ۳ & -۳ \end{pmatrix} = e^{۲t} \begin{pmatrix} ۳t+۱ & ۱-۳t-۱ \\ ۳t & ۱-۳t \end{pmatrix}$$

$$= e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱+۳t & -۳t \\ ۳t & ۱-۳t \end{pmatrix}$$ ۵ نمره

بنابراین جواب معادله غیرهمگن عبارت است از:

$$x(t) = e^{At} x_۰ + e^{At} \underbrace{\int_۰^t e^{-As} \cdot e^{۲s} \begin{pmatrix} s \\ ۱ \end{pmatrix} ds}_{I}$$ ۳ نمره

$$I = \int_۰^t \begin{pmatrix} ۱-۳s & ۳s \\ -۳s & ۱+۳s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ ۱ \end{pmatrix} ds = \int_۰^t \begin{pmatrix} ۴s - ۳s^۲ \\ -۳s^۲ + ۳s + ۱ \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} ۲t^۲ - t^۳ \\ -t^۳ + \frac{۳}{۲}t^۲ + t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱+۳t \\ ۳t \end{pmatrix} + e^{۲t} \begin{pmatrix} ۱+۳t & -۳t \\ ۳t & ۱-۳t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۲t^۲ - t^۳ \\ -t^۳ + \frac{۳}{۲}t^۲ + t \end{pmatrix} = e^{۲t} \begin{bmatrix} ۱+۳t-t^۲+\frac{۱}{۲}t^۳ \\ ۴t - \frac{۳}{۲}t^۲ + \frac{۱}{۲}t^۳ \end{bmatrix}$$ ۶ نمره

سؤال ۲ : $(1+x^2)y'' - y' + y = -3x+4$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$

$$p(x) = \frac{-1}{1+x^2} , \quad q(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow$$ $x=0$ نقطهٔ عادی

$p(x)$ و $q(x)$ در $x=0$ تحلیلی

$\Rightarrow$ جواب سری توانی حول نقطهٔ عادی $x=0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{و}$$

۵ نمره

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \Rightarrow (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -3x+4$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -3x+4 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_{n+1} + (n^2-n+1) a_n \right] x^n$$

۱۰ نمره

$$= -3x+4 \Longrightarrow \left. \begin{array}{l} n=0 : \; 2a_2 - a_1 + a_0 = 4 \\ n=1 : \; 6a_3 - 2a_2 + a_1 = -3 \\ n=2 : \; 12a_4 - 3a_3 + 3a_2 = 0 \\ n=3 : \; 20a_5 - 4a_4 + 7a_3 = 0 \\ n=4 : \; 30a_6 - 5a_5 + 13a_4 = 0 \\ \ldots \\ a_0 = y(0) = 1 \\ a_1 = y'(0) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = -\frac{1}{4} \\ a_5 = -\frac{1}{20} \\ a_6 = \frac{1}{10} \\ \ldots \end{array}$$

۵ نمره

سؤال ۳ :

$xy'' + (1-x)y' + xy = 0, \quad x > 0$

$p(x) = \frac{1-x}{x}, \quad q(x) = \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow$ $p(x)$ در $x=0$ نامتناهی می

$\Rightarrow$ نقطهٔ تکین $x=0 \Rightarrow \begin{cases} xp(x) = 1-x \\ x^2 q(x) = x^2 \end{cases} \Rightarrow$ در $x=0$ تحلیلی $\Rightarrow$ $x=0$ نقطهٔ تکین منظم

۵ نمره

$\Rightarrow$ روش فروبنیوس: $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$

۵ نمره

$xp(x) = 1-x \Rightarrow p_0 = 1, \; p_1 = -1, \; p_2 = p_3 = \dots = 0$

$x^2 q(x) = x^2 \Rightarrow q_0 = q_1 = q_3 = q_4 = q_5 = \dots = 0, \; q_2 = 1$

$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r + 0 = r^2$

۵ نمره

معادله شاخص: $F(r) = r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 0$

معادله بازگشتی: $F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] a_k = 0, \quad n = 1, 2, \dots$

فرض کنید $r = r_1 = r_2 = 0$، اگر $n=1$، آنگاه:

$(0+1)^2 a_1 + [(0+0)\times -1 + 0] a_0 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

۵ نمره

و برای $n \geq 2$، داریم:

$(0+n)^2 a_n + \{[(0+n-1)\times -1 + 0] a_{n-1} + [0+1] a_{n-2} + 0 + 0 + \dots + 0\} = 0$

$\Rightarrow n^2 a_n - (n-1) a_{n-1} + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$

۵ نمره

$n=2, \; 2^2 a_2 - 1a_1 + a_0 = 0 \xrightarrow[a_1=0]{} a_2 = -\frac{1}{4} a_0$

$n=3, \; 3^2 a_3 - 2a_2 + a_1 = 0 \xrightarrow[a_1=0]{} a_3 = -\frac{1}{18} a_0$

$n=4, \; 4^2 a_4 - 3a_3 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{192} a_0$

فرض کنید $a_0 = 1$، پس، یک جواب مستقل خطی بصورت زیر است:

....

$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$

$= 1 + 0x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{192}x^4 + \dots = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{192}x^4 + \dots$

۵ نمره

سوال ۵ : معادله انتگرال زیر را حل کنید.

$$y(x) = x - e^{x}\int_0^x e^{-v}\, y(v)\, dv$$

$$\int_0^x e^{x-v}\, y(v)\, dv = e^{x} * y(x)$$

$$\Rightarrow y(x) = x - (e^{x} * y(x))$$

$$L[y(x)] = L[x] - L[e^{x} * y(x)]$$ ۳

$$= L[x] - (L[e^{x}] \cdot L[y(x)])$$ ۲

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s-1} L[y(x)]$$ ۵

$$\Rightarrow \begin{cases} L[y(x)] = \dfrac{s-1}{s^3} = \dfrac{s}{s^3} - \dfrac{1}{s^3} \\ y(x) = L^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{s^3}\right] = x - \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$ ۵

پاسخ سؤال 4

4)

$$y''+y'+y=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & t\geq 1\end{cases}\quad ,y(0)=y'(0)=1$$

$$1-2u_1(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & t\geq 1\end{cases}\Rightarrow y''+y'+y=1-2u_1(t)$$ 2

$$\Rightarrow L\{y''+y'+y\}=L\{1-2u_1(t)\}$$

3 1

$$\Rightarrow L\{y''\}+L\{y'\}+L\{y\}=L\{1\}-2L\{u_1(t)\}$$

$$\Rightarrow s^2L\{y\}-s\underset{1}{y(0)}-\underset{1}{y'(0)}+sL\{y\}-\underset{1}{y(0)}+L\{y\}=\frac{1}{s}-2\cdot\frac{e^{-s}}{s}$$

1 1

$$\Rightarrow s^2L\{y\}-s-2+sL\{y\}+L\{y\}=\frac{1-2e^{-s}}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\}(s^2+s+1)-s-2=\frac{1-2e^{-s}}{s}\Rightarrow L\{y\}(s^2+s+1)=\frac{1-2e^{-s}}{s}+s+2=\frac{1-2e^{-s}+s^2+2s}{s}$$

$$\Rightarrow L\{y\}=\frac{1-2e^{-s}+s^2+2s}{s(s^2+s+1)}=\frac{s^2+2s+1}{s(s^2+s+1)}+\frac{-2e^{-s}}{s(s^2+s+1)}$$ 3

$$\frac{s^2+2s+1}{s(s^2+s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}=\frac{A(s^2+s+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+s+1)}$$

$$\Rightarrow s^2+2s+1=As^2+As+A+Bs^2+Cs=(A+B)s^2+(A+C)s+A$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\Rightarrow B=0\\ A+C=2\Rightarrow C=1\\ A=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{s^2+2s+1}{s(s^2+s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$\Rightarrow y=L^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+1}{s(s^2+s+1)}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{-2e^{-s}}{s(s^2+s+1)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1}\right\}$$

1 3

$$-2L^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+s+1)}\right\}=1+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s+1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}\right\}-2u_1(t)h(t-1)$$

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\}$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}-2u_1(t)h(t-1)$$

5

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+s+1)}\right\}$$

$$=1+\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-2u_1(t)h(t-1)$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s(s^2+s+1)} \right\}$$

$$\frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+s+1} = \frac{A(s^2+s+1)+(Bs+C)s}{s(s^2+s+1)}$$

$$\Rightarrow \left\{ (A+B)s^2 + (A+C)s + A = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ A+C=0 \Rightarrow C=-1 \\ A=1 \end{array} \right. \right.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s(s^2+s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} \Rightarrow L^{-1}\{h(t)\} = L^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} \right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{ \frac{s+1}{s^2+s+1} \right\} = 1 - L^{-1}\left\{ \frac{s+\overbrace{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right\} = 1 - L^{-1}\left\{ \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right\}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}L^{-1}\left\{ \frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \right\} = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

5

$$\Rightarrow h(t-1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)$$

$$\Rightarrow y = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2u_1(t)\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-1)}\right.$$

BJK

$$\left.\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-1)\right)\right)$$

5