

ص

به نام خالق یکتا
دانشگاه صنعتی اصفهان - دانشکده علوم ریاضی
کوئیز اول معادلات دیفرانسیل - مهرماه ۹۷ - مدت ۶۰ دقیقه

باسم نام و نام خانوادگی

نام و نام خانوادگی : شماره‌ی دانشجویی : نام استاد :

تذکر: جواب سؤالات تشریحی را پشت این برگه و روی برگه بعد بنویسید و از پشت برگه دوم به عنوان چرک‌نویس استفاده کنید. جواب سؤالات تستی را روی خود آن‌ها علامت بزنید. در طول امتحان به هیچ سؤالی پاسخ داده نمی‌شود.

۱. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $2x dx + [(x^2 - 1) \cot y - 1] dy = 0$ را بیابید. (۳ نمره) *بارم درصنم نهم*

۲. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y' = \frac{x - y + 1395}{x + y - 1397}$ را بیابید. (۳ نمره) *بارم درصنم نهم*

۳. کدامیک از معادلات دیفرانسیل زیر نسبت به y خطی نیست؟

(الف) $(2xy + e^x)dx - dy = 0$

(ب) $(2xy + x)dx - e^x dy = 0$

(ج) $(1 + x)dx - xy dy = 0$

(د) $\sin x dx - (x + e^x) dy = 0$

۴. فرض کنید معادله $R(x, y)dx + S(x, y)dy = 0$ داده شده و $\frac{1}{S}(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial x}) = 1$ کدام گزینه یک عامل انتگرال‌ساز معادله است؟

(الف) e^x (ب) x (ج) y (د) e^y

۵. با تغییر متغیر $z = x - y$ معادله $y' = \frac{2x - 2y}{x - y + 1}$ به کدام معادله زیر تبدیل می‌شود؟

(الف) $z' = \frac{-z+1}{z-1}$

(ب) $z' = \frac{-z+1}{z+1}$

(ج) $z' = \frac{z-2}{z+2}$

(د) $z' = \frac{z+1}{z-1}$

۶. به ازای کدام مقادیر a و b معادله $(ax^b \sin^2 y - \sin y)dx + (x^2 \sin y \cos y - x \cos y)dy = 0$ کامل است؟

(الف) $b = 2, a = \frac{2}{3}$

(ب) $b = 2, a = \frac{2}{2}$

(ج) $b = 3, a = 2$

(د) $b = 2, a = 2$

((موفق باشید))

سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	سؤال ۶	جمع کل

١) جواب عمومی را بیابید (٣ نمره) $2x dx + ((x^2-1) \cot y - 1) dy = 0$ (٥)

$M = 2x$, $N = (x^2-1) \cot y - 1$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cot y$ \Rightarrow معادله کلاسیک (٩)

$S(y) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2x} (0 - 2x \cot y) = \cot y$

$\Rightarrow S(y) = \cot y$ $\int \cot y dy = \ln(\sin y)$ (١)
 ضریب انتگرال: $\mu(y) = e^{\int \cot y dy} = e^{\ln(\sin y)} = \sin y$

$\Rightarrow 2x \sin y dx + ((x^2-1) \cos y - \sin y) dy = 0$ (٥)

$M = 2x \sin y$, $N = (x^2-1) \cos y - \sin y$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x \cos y$ $\frac{\partial N}{\partial x} = 2x \cos y$ (٥)

$\frac{\partial M}{\partial x} = 2 \sin y \Rightarrow M(x,y) = x^2 \sin y + h(y)$ (٥)

$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} \Rightarrow x^2 \cos y + h'(y) = (x^2-1) \cos y - \sin y = N$

$\Rightarrow h'(y) = -\cos y - \sin y \Rightarrow h(y) = -\sin y + \cos y + C$

\Rightarrow جواب: $x^2 \sin y + \cos y - \sin y = C$ (٥)

بام سوال ۲ کثیر لول معادلات دیفرانسیل

۲- جواب عمومی معادله $y' = \frac{x-y+1395}{x+y-1397}$ (۳۴ نمره)

حل: استفاده از تغییر متغیر $\left\{ \begin{array}{l} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{array} \right.$ و حاصل تبدیل آن (تبدیل معادله)

به همراه یافتن نقطه (x_0, y_0) چه به عنوان محل تلاقی دو خط یا با استفاده از معادله
 $(x_0, y_0) = (1, 1396)$
 $x = X + 1$
 $y = Y + 1396$

نوشتن معادله جدید
 $dx = dX \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$
 $dy = dY$
 $v + \frac{dv}{dx} X = \frac{1-v}{1+v}$ $y = v x$ $v = \frac{Y}{X}$
 استفاده از تغییر متغیر
 و نوشتن معادله جدید
 $X \frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - 2v + 1}{1+v}$

حل معادله جدید با جداسازی متغیر

$\int \frac{1}{v^2 - 2v + 1} dv = \int \frac{1}{X} \frac{dX}{X}$
 $\ln|X| + C = -\frac{1}{2} \ln|v^2 - 2v + 1|$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \ln \left| -\left(\frac{y-1396}{x-1}\right)^2 - 2\left(\frac{y-1396}{x-1}\right) + 1 \right| = \ln|x-1| + C$

۱/۳۴