بارم سؤالات پایان ترم درس معادلات دیفرانسیل ترم ۱-۹۷
لطفاً قبل از درخواست تجدید نظر بارم سؤالات را ملاحظه بفرمایید

به نام خالق یکتا

دانشگاه صنعتی اصفهان - دانشکده علوم ریاضی

آزمون پایان‌ترم معادلات دیفرانسیل - ۱۶ دی‌ماه ۹۷ - مدت: ۱۶۰ دقیقه

نام و نام خانوادگی : .... شماره‌ی دانشجویی : .... نام استاد : ....

تذکّر: این دفترچه حاوی برگه سؤالات، برگه تبدیلات لاپلاس و پنج برگه سفید است. لطفاً پاسخ هر سؤال را در یک برگه بنویسید. از پشت دو برگه اول می‌توانید به عنوان چرک‌نویس استفاده کنید. به هیچ وجه برگه‌ها را از هم جدا نکنید.

---

۱. جواب عمومی دستگاه زیر را به روش مقدار ویژه - بردار ویژه به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

۲. جواب عمومی دستگاه زیر را به روش مقدار ویژه - بردار ویژه به دست آورید. (۲۰ نمره)

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

۳. الف) در معادله $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$ نقاط عادی، غیرعادی منظم و غیرعادی نامنظم را تعیین کنید. (۴ نمره)

ب) جواب معادله فوق را به صورت سری‌های توانی حول $x_0 = 0$ بنویسید. (محاسبه حداقل سه جمله ناصفر اول سری الزامی است) (۱۶ نمره)

۴. جواب معادله دیفرانسیل $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ با شرط اولیه $y(0) = y'(0) = 0$ را با کمک تبدیلات لاپلاس به دست آورید. (۲۰ نمره)

۵. معادله دیفرانسیل انتگرالی $y'' + y = u_\pi(x)\delta(x-\pi) + \int_0^x u_\pi(x-z)e^z dz$ با شرط اولیه $y(0) = y'(0) = 0$ را با کمک تبدیلات لاپلاس حل کنید. (۲۰ نمره)

سؤال ۱	سؤال ۲	سؤال ۳	سؤال ۴	سؤال ۵	جمع کل از ۱۰۰

پاسخ سوال ۱

$$X' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} X$$

ماتریس ضرایب دستگاه فوق یعنی A دارای مقادیر ویژه $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = 1$ می باشد چرا که

$$\det(A - rI) = \begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 \\ 0 & 2-r & 0 \\ 0 & 0 & 1-r \end{vmatrix} = (2-r)(2-r)(1-r) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=2 \\ r=1 \end{cases}$$

بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $r_3 = 1$ بصورت زیر است

$$(A - I) V^{(3)} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = 0 \\ \boxed{V_2 = 0} \\ \boxed{V_3 \text{ آزاد}} \end{cases}$$

$$V^{(3)} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_3 \end{pmatrix} = V_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

بردار ویژه متناظر مقدار ویژه $r_1 = r_2 = 2$ بصورت زیر است

$$(A - 2I) V^{(2)} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 0 \\ -V_3 = 0 \\ V_1 \text{ آزاد} \end{cases}$$

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

با توجه به اینکه تعداد بردارهای ویژه کمتر از تعداد مقادیر ویژه است در پی بردار ناصفر V

$(A - 2I)^2 V = 0$ که $(A - 2I) V \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \end{pmatrix}$$

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجویی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

برای اینکه $(A-2I)V \neq 0$ باشد بردار $\underline{V}$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$V = V^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

۳ بردار ویژه عبارت‌اند از

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad V^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad V^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

جواب‌های مستقل معادله عبارت‌اند از

$$X^{(1)}(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{2t}\\0\\0\end{pmatrix} \quad , \quad X^{(3)}(t) = e^{1t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\e^{t}\end{pmatrix}$$

$$X^{(2)}(t) = e^{2t}\left[I + t(A-2I)\right]V^{(1)}$$

$$= e^{2t}\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&0&-t\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X^{(2)}(t) = \begin{pmatrix}te^{2t}\\e^{2t}\\ \end{pmatrix}$$

سؤال ۲ معادلات دیفرانسیل ۹۷-۱

$$x' = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $\quad \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2+1=0 \to \lambda=\pm$ ۲

$\lambda_1 = i \to A - iI = \begin{pmatrix}-i & -1\\ 1 & -i\end{pmatrix} \Rightarrow (A-iI)\vec{\eta} = \vec{0}$

$\to \left(\begin{array}{cc|c}-i & -1 & 0\\ 1 & -i & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c}-i & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \eta_2 = -i\eta_1$ ۲

$\vec{\eta} = \begin{pmatrix}\eta_1\\ -i\eta_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}\eta_1 \Rightarrow \vec{\eta}^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$ ۲

بردار ویژه دوم : $\vec{\eta}^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} = \overline{\vec{\eta}^{(1)}}$

$\Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ ۲

$\Rightarrow x_1(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}, \quad x_2(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_c(t) = c_1\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ ۲

$\Psi(t) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ ماتریس اساسی

۲

$\det(\Psi(t)) = 1 \neq 0 \longrightarrow$ دو جواب مستقل خطی هستند

$x_p(t) = \Psi(t) \cdot u(t)$

$$\left.\begin{aligned} x_p'(t) &= \Psi' u + \Psi u' \\ x_p' &= A\Psi u + g \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Psi u' = g \rightarrow u' = \Psi^{-1} g$$ ۱

$$\Psi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$ ۲

$$\Rightarrow u' = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos 2t}{2} \\ -\frac{1}{2}\sin 2t \end{pmatrix}$$ ۱

$$\rightarrow \begin{cases} u_1' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t \\ u_2' = -1/2 \sin 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = t/2 + 1/4 \sin 2t \\ u_2 = 1/4 \cos 2t \end{cases}$$ ۳

$$\Rightarrow x_p(t) = \Psi(t) u(t) = \begin{pmatrix} t/2 \cos t + 1/4 \sin 2t \cos t - 1/4 \sin t \cdot \cos 2t \\ t/2 \sin t + 1/4 \sin t \sin 2t + 1/4 \cos 2t \cos t \end{pmatrix}$$

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t)$$ ۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

قسمت اول

۳- بارم سؤال ۳

الف)

$2x^2y'' + 3xy' + (2x^2-1)y = 0$

(۴)

$p(x) = \frac{3x}{2x^2} = \frac{3}{2x}, \quad q(x) = \frac{2x^2-1}{2x^2} \Rightarrow$ p(x) و q(x) در $x \neq 0$ تحلیلی

q(x) در $x=0$ ناشناسی، $x \neq 0$ عادی

$xp(x) = \frac{3}{2}, \quad x^2q(x) = x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow$ xp(x) و $x^2q(x)$ در $x=0$ تحلیلی

$\Rightarrow$ $x=0$ غیرعادی منظم (۳)

$x=0$ نقطه غیرعادی منظم $\Rightarrow$ روش فروبنیوس $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ (۳)

معادله مشخصه $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$

رابطه بازگشتی $F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]a_k = 0, \quad n = 1,2,3,$

$xp(x) = \frac{3}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \Rightarrow p_0 = \frac{3}{2}, p_1 = p_2 = \cdots = 0$ (۲)

$x^2q(x) = x^2 - \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \Rightarrow q_0 = -\frac{1}{2}, q_1 = 0, q_2 = 1, q_3 = q_4 = \cdots = 0$

معادله مشخصه $F(r) = r(r-1) + \frac{3}{2}r - \frac{1}{2} = \underbrace{r^2 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}}_{= (r-\frac{1}{2})(r+1)} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2}$

$= \frac{1}{2}, -1$ (۲)

$\Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$

(۳)

رابطه بازگشتی $\cancel{F}(r+n-\frac{1}{2})(r+n+1)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}[(r+k)p \ldots$

$$\Rightarrow (r+n-\tfrac{1}{2})(r+n+1)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, \dots$$

برای $n=1$، در رابطه بازگشتی $(r+\tfrac{1}{2})(r+2)a_1 = 0 \xLeftarrow[r=r_{1,2}]{} a_1 = 0$

از $r = r_1 = \frac{1}{2}$، آن گاه

درست

$$(\tfrac{1}{2}+n-\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}+n+1)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, \dots$$

$$\Rightarrow n(n+\tfrac{3}{2})a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+\frac{3}{2})}, \quad n=2, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{2a_{n-2}}{n(2n+3)}, \quad n = 2, \dots$$

از $n=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{2a_0}{2\times 7}$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{2a_1}{3\times 9} = 0$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = -\frac{2a_2}{4\times 11} = -\frac{2}{4\times 11}\times\frac{-2}{2\times 7}a_0 = \frac{2^2}{2\times 4\times 7\times 11}a_0$$

$$n=5 \Rightarrow a_5 = -\frac{2a_3}{5\times 13} = 0$$

$$n=6 \Rightarrow a_6 = -\frac{2a_4}{6\times 15} = -\frac{2^3}{2\times 4\times 6\times 7\times 11\times 15}a_0$$

$$\Rightarrow y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

$a_0 = 1$

۳

$$= x^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{2}{2\times 7}x^2 + \frac{2^2}{2\times 4\times 7\times 11}x^4 + \dots\right)$$

از $r = r_2 = -1$، آنگاه

$$\cancel{(-1+n-\tfrac{1}{2})(-1+n+1)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n=2, \dots}$$

$$\cancel{\Rightarrow (n+\tfrac{1}{2})(n+2)a_n + a_{n-2} = 0, \quad n=2 \dots \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\frac{1}{2})(n+2)}, \quad n=2, \dots}$$

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

تست درس

ادامه سوال ۳

$(-1+n-\frac{1}{2})(-1+n+1)a_n + a_{n-2} = 0 \quad , \quad n=2, \ldots$

$\Rightarrow (n-\frac{3}{2})n a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-\frac{3}{2})} \quad , \quad n=2,3, \ldots$

$\Rightarrow a_n = -\frac{2a_{n-2}}{n(2n-3)} \quad , \quad n=2,3, \ldots$

اگر $n=2 \Rightarrow a_2 = -\frac{2a_0}{2\times 1} = -\frac{2a_0}{2\times 1}$

اگر $n=3 \Rightarrow a_3 = -\frac{2a_1}{3\times 3} = 0$

اگر $n=4 \Rightarrow a_4 = -\frac{2a_2}{4\times 5} = \frac{2^2}{2\times 4\times 1\times 5}a_0$

اگر $n=5 \Rightarrow a_5 = -\frac{2a_3}{5\times 7} = 0$

اگر $n=6 \Rightarrow a_6 = -\frac{2a_4}{6\times 9} = -\frac{2^3}{2\times 4\times 6\times 1\times 5\times 9}a_0$

$\underset{a_0=1}{\Rightarrow} y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r_2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$

$= x^{-1}\left(1 - \frac{2}{2\times 1}x^2 + \frac{2^2}{2\times 4\times 1\times 5}x^4 + \ldots\right)$

۳

جواب عمومی: $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

۱

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

سوال ۴ : جواب معادله دیفرانسیل $xy''+(x-1)y'-y=0$ و شرایط اولیه $y(0)=y'(0)=0$ را به کمک تبدیلات لاپلاس بدست آورید (۲۰ نمره)

حل : داریم

$$xy''+xy'-y'-y=0$$

اگر فرض کنیم $\mathcal{L}[y]=Y(s)$ آنگاه

$$\mathcal{L}[y']=sY(s), \quad \mathcal{L}[y'']=s^2Y(s)$$

۱۵ نمره

$$\Rightarrow \mathcal{L}[xy']=(-1)(sY(s))'=-Y(s)-sY'(s)$$

$$\mathcal{L}[xy'']=(-1)(s^2Y(s))'=-2sY(s)-s^2Y'(s)$$

$$\Rightarrow -2sY(s)-s^2Y'(s)-Y(s)-sY'(s)-sY(s)-Y(s)=0$$

$$\Rightarrow (s^2+s)Y'(s)=-(3s+2)Y(s)$$

$$\Rightarrow \frac{dY(s)}{Y(s)}=\frac{-3s-2}{s(s+1)}ds \xrightarrow[\text{مرتبه اول}]{\text{جدا شدنی}} \ln Y(s)=\int\frac{-2-3s}{s(s+1)}ds$$

۵ نمره

$$=\int\frac{-2}{s}ds-\int\frac{1}{s+1}ds=-2\ln s-\ln(s+1)=\ln\frac{1}{(s+1)s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)} \Rightarrow y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]$$

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

$$\begin{cases} y''+y = u_\pi(x)\,\delta(x-\pi)+\int_0^x u_\pi(x-z)\,e^z\,dz \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

بارم سئوال ۵

حل:

$$\mathcal{L}[y'']+\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}\left[u_\pi(x)\,\delta(x-\pi)+\int_0^x u_\pi(x-z)\,e^z\,dz\right]$$

$$s^2Y(s)+Y(s)=e^{-\pi s}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s-1)} \Rightarrow Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s-1)(s^2+1)}$$

(۴ نمره) (۳ نمره) (۳ نمره)

(۱ نمره) به صورت

$$y(x)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s}}{s(s-1)(s^2+1)}\right]$$

$$\frac{1}{s(s-1)(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1}$$

۵ نمره

$$A=-1 \quad B=\frac{3}{2} \quad C=-\frac{1}{2}\,,\; D=-\frac{1}{2}$$

$$y(x)=u_\pi(x)\sin(x-\pi)-u_\pi(x)+\frac{3}{2}u_\pi(x)\,e^{x-\pi}-\frac{1}{2}u_\pi(x)\,e^{x-\pi}-\frac{1}{2}u_\pi(x)\cos(x-\pi)-\frac{1}{2}u_\pi(x)\sin(x-\pi)$$

۵ نمره