$y' = y^2 - 4 = f(y)$

$f(y) = y^2 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$ (۳ نمره)

نقاط تعادل

$f'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

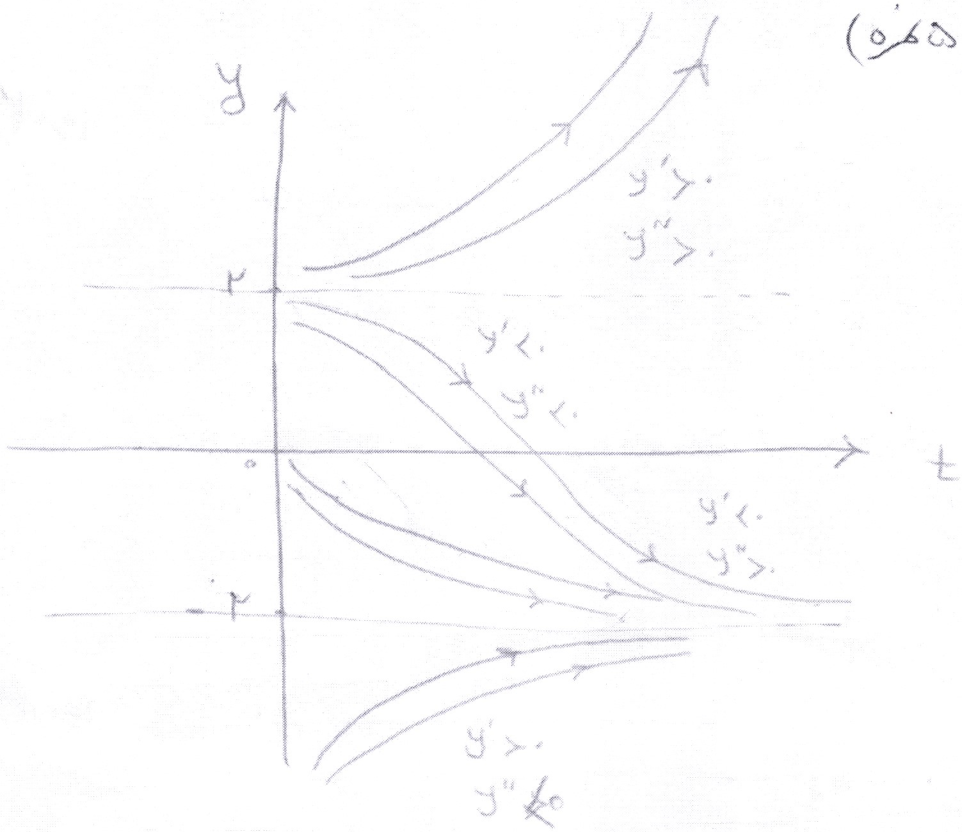
$$y'' = f(y).f'(y) \Rightarrow \begin{cases} \underset{\text{هم علامت}}{f'(y), f(y)} \Rightarrow y'' > 0 \\ \underset{\text{مختلف العلامة}}{f'(y), f(y)} \Rightarrow y'' < 0 \end{cases}$$

y		-2		0		2	
$y' = f(y)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f'(y)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	y صعودی تقعر رو به پایین $\nearrow$ $\cap$		y نزولی تقعر رو به بالا $\searrow$ $\cup$		y نزولی تقعر رو به پایین $\searrow$ $\cap$		y صعودی تقعر رو به بالا $\nearrow$ $\cup$

(۵ نمره)

پشت صفحه

(۵ نمره)



خط فاز:

$y = -۲$ نقطه تعادلی پایدار

$y = ۲$ نقطه تعادلی ناپایدار

$f'(-۲)<۰$

$f'(۲)>۰$

(۳ نمره)

جواب عمومی معادله دیفرانسیل زیر را بیابید.

$$۲ + y' = \sec(۲x + y)$$

(۱۰ نمره)

راه اول:

۲ ۳

با استفاده از تغییر متغیر $z = ۲x + y$ داریم $z' = ۲ + y'$ و در نتیجه

$$\begin{aligned}
۲ + y' = \sec(۲x + y) \quad &\Longrightarrow \quad z' = \sec(z) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{۱}{\cos(z)} \\
&\Longrightarrow \quad \cos(z)\, dz = dx \\
&\Longrightarrow \quad \sin(z) = x + c \\
&\Longrightarrow \quad \sin(۲x + y) = x + c \quad ۵
\end{aligned}$$

(sec را اشتباه نوشته باشند) ۲-

(c را ننوشته باشند ۲-)

راه دوم: معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$۲ + \frac{dy}{dx} = \frac{۱}{\cos(۲x + y)}$$

بنابراین

$$(۲\cos(۲x + y) - ۱)dx + \cos(۲x + y)\, dy = ۰$$

قرار می‌دهیم $M(x, y) = ۲\cos(۲x + y)$ و $N(x, y) = \cos(۲x + y)$. چون $M_y = -۲\sin(۲x + y)$ و $N_x = -۲\cos(۲x + y)$، پس معادله کامل است. در نتیجه ۵

$$\begin{aligned}
(۲\cos(۲x + y) - ۱)dx + \cos(۲x + y)\, dy = ۰ \quad &\Longrightarrow \quad d(\sin(۲x + y) - x) = ۰ \\
&\Longrightarrow \quad \sin(۲x + y) - x = c \quad ۵
\end{aligned}$$

(c را ننوشته باشند ۲-)

بارم سوال ۴ میانترم معادلات دیفرانسیل ۹۷-۲

۴- معادله دیفرانسیل همگن زیر را حل کنید

$$xy'' + (7-2x)y' + (x-7)y = 0 \qquad x>0$$

حل: چون $x + (7-2x) + (x-7) = 0$ پس $y_1 = e^x$ یک جواب معادله است

۲ نمره

جواب y_2 را که مجموعه جواب $\{y_1, y_2\}$ مستقل خطی باشد را از روش کاهش مرتبه بدست می‌آوریم.

$$y_2 = u y_1$$

$$u' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx} = \frac{1}{e^{2x}} e^{-\int\left(\frac{7-2x}{x}\right)dx} = \frac{1}{e^{2x}} e^{2x} \cdot e^{\ln x^{-7}} = x^{-7}$$

۴ نمره

اگر در این قسمت کسی $p(x)$ را اشتباه بنویسد یا منفی را نگذارد ۲ از ۴ نمره را کسر کنید

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{6}x^{-6}$$

$$\Rightarrow y_2 = -\frac{1}{6}e^x x^{-6}$$

۲ نمره

$$y = c_1 e^x + c_2\left(-\frac{1}{6}e^x x^{-6}\right)$$

۲ نمره

$$y = c_1 e^x + c_2 e^x x^{-6}$$

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

س ۳

$$\underbrace{(x^4\sin x-2xy^3)}_{M}dx+\underbrace{3x^2y^2}_{N}dy=0$$

$$M_y=-6xy^2,\quad N_x=6xy^2\Rightarrow M_y\neq N_x\Rightarrow$$ معادله کامل نیست

$$R(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{-6xy^2-6xy^2}{3x^2y^2}=-\frac{12xy^2}{3x^2y^2}=-\frac{4}{x}\Rightarrow \mu(x)=e^{\int R(x)dx}=e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=\frac{1}{x^4}$$

عامل انتگرال ساز

۵ نمره

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\sin x-2\left(\frac{y^3}{x^3}\right)\right]}_{P}dx+\underbrace{3\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}_{Q}dy=0 \quad (*)$$

$$P_y=Q_x=-6\left(\frac{y^2}{x^3}\right)\Rightarrow$$ (*) معادله کامل $\Rightarrow$ جواب عمومی $f(x,y)=C$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P=\sin x-2\left(\frac{y^3}{x^3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=Q=3\left(\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P=\sin x-2\left(\frac{y^3}{x^3}\right)\Rightarrow f(x,y)=\int\left[\sin x-2\left(\frac{y^3}{x^3}\right)\right]dx$$

$$=-\cos x+\frac{y^3}{x^2}+h(y)$$

$$\left.\begin{aligned}\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}&=3\left(\frac{y^2}{x^2}\right)+h'(y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=Q=3\left(\frac{y^2}{x^2}\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow h'(y)=0\Rightarrow h(y)$$

۸ نمره

$$\Rightarrow f(x,y)=-\cos x+\frac{y^3}{x^2}\Rightarrow$$ جواب عمومی $\boxed{-\cos x+\frac{y^3}{x^2}=C}$

۱ نمره

ل ۵

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$$

۱) قسمت همگن معادله فوق را که یک معادله اویلر همگن است حل می کنیم

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

۳ نمره

ه شاخص عبارت است از:

$$r(r-1) - 2r + 2 = r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0 \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

راین $\underline{y_1 = x^1}$ ، $\underline{y_2 = x^2}$ جواب های اساسی قسمت همگن بوده و جواب عمومی معادله

۱ نمره   ۱ نمره

عبارت است از:

$$y_H = c_1 x + c_2 x^2$$

به کمک روش تغییر پارامتر یک جواب خاص ناهمگن (y_p) را بدست می آوریم.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

۲ نمره

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' x + u_2' x^2 = 0 \\ u_1' + 2u_2' x = \frac{x^2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (I)\ u_1' + u_2' x \\ (II)\ u_1' + 2u_2' x \end{cases}$$

۲

$$(II) - (I) \Rightarrow u_2' x = 1 \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{u_2 = \ln x}$$

۲

جایگذاری $u_2' = \frac{1}{x}$ در معادله (I)

$$\Rightarrow u_1' + 1 = 0 \Rightarrow u_1' = -1 \Rightarrow \boxed{u_1 = -x}$$

۲

... شاخص عبارت است از:

$$r(r-1)-2r+2 = r^2-3r+2 = (r-1)(r-2)=0 \quad \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=2 \end{cases}$$

3 نمره

... $y_1 = x^1$ ، $y_2=x^2$ جواب‌های اساسی معادله همگن بوده و جواب عمومی معادله

1 نمره 1 نمره

... عبارت است از:

$$y_H = c_1 x + c_2 x^2$$

به کمک روش تغییر پارامتر یک جواب خاص ناهمگن (y_p) را بدست می‌آوریم.

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$ 2 نمره

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' x + u_2' x^2 = 0 \\ u_1' + 2u_2' x = \frac{x^2}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{I} \quad u_1' + u_2' x \\ \text{II} \quad u_1' + 2u_2' x \end{cases}$$

2

$$\text{II} - \text{I} \Rightarrow u_2' x = 1 \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{u_2 = \ln x}$$ 2

جایگذاری $u_2' = \frac{1}{x}$ در معادله I

$$\Rightarrow u_1' + 1 = 0 \Rightarrow u_1' = -1 \Rightarrow \boxed{u_1 = -x}$$ 2

بنابراین $y_p = -x^2 + x^2 \ln x$ و جواب عمومی معادله عبارت است از

$$y = y_H + y_p = c_1 x + c_2 x^2 - x^2 + x^2 \ln x$$ 2

حل سوال ۶ معادلات دیفرانسیل

$$y'' - 2y' + 5y = x e^{x} \sin^2 x$$

$$r^2 - 2r + 5 = 0 \longrightarrow r = 1 \pm 2i$$ ریشه های مختلط ۲

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{x} \cos 2x + c_2 e^{x} \sin 2x$$ ۳

۵

$$\Rightarrow y'' - 2y' + 5y = x e^{x} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = g_1 + g_2$$ ۲

$$g_1 = \frac{x e^{x}}{2} \longrightarrow y_{p_1} = x^{0} e^{x} (Ax + B)$$ ۲

$$g_2 = - \frac{x e^{x} \cos 2x}{2} \longrightarrow y_{p_2} = x^{1} e^{x} \Big((A'x + B') \cos 2x + (A''x + B'') \sin 2x \Big)$$ ۲

۸

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$ ۲

$$y = y_h + y_p$$ ۲