حل و بارم سئوال ۱ میان ترم معادلات

$y' = (y+4)(y-6)$

نقاط تعادلی این معادله دیفرانسیل $y=-4$, $y=6$ هستند.

۶

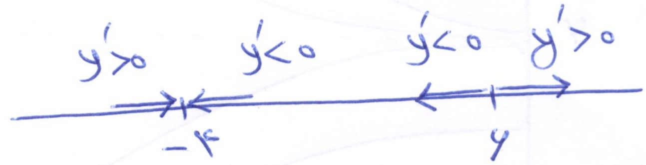
جدول تعیین علامت زیر را برای y' داریم: ۳

y		-4		6	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

۲

پس تابع y در بازه $(-\infty,-4)$ صعودی، روی بازه $(-4,6)$ نزولی و روی بازه $(6,\infty)$ صعودی می باشد. بنابراین خط فاز برای این معادله دیفرانسیل بصورت زیر خواهد بود:

۵



۲

بنابراین نقطه $y=6$ یک نقطه تعادلی ناپایدار و نقطه $y=-4$ یک نقطه تعادلی پایدار مجانبی می باشد. ۳

حال نقاط عطف این تابع را بدست می آوریم:

$y' = (y+4)(y-6)$

$\Rightarrow y'' = y'(y-6) + (y+4)y' = y'(2y-2) = 0$

$\Rightarrow y' = 0 \;,\; y = 1 \Rightarrow y = -4, 1, 6.$ ۳

حال جدول تعیین علامت زیر را داریم :

y		-۴		۱		۶	
y′	+	۰	−		−	۰	+
y″	−	۰	+	۰	−	۰	+
جهت تقعر :	∩		∪		∩		∪

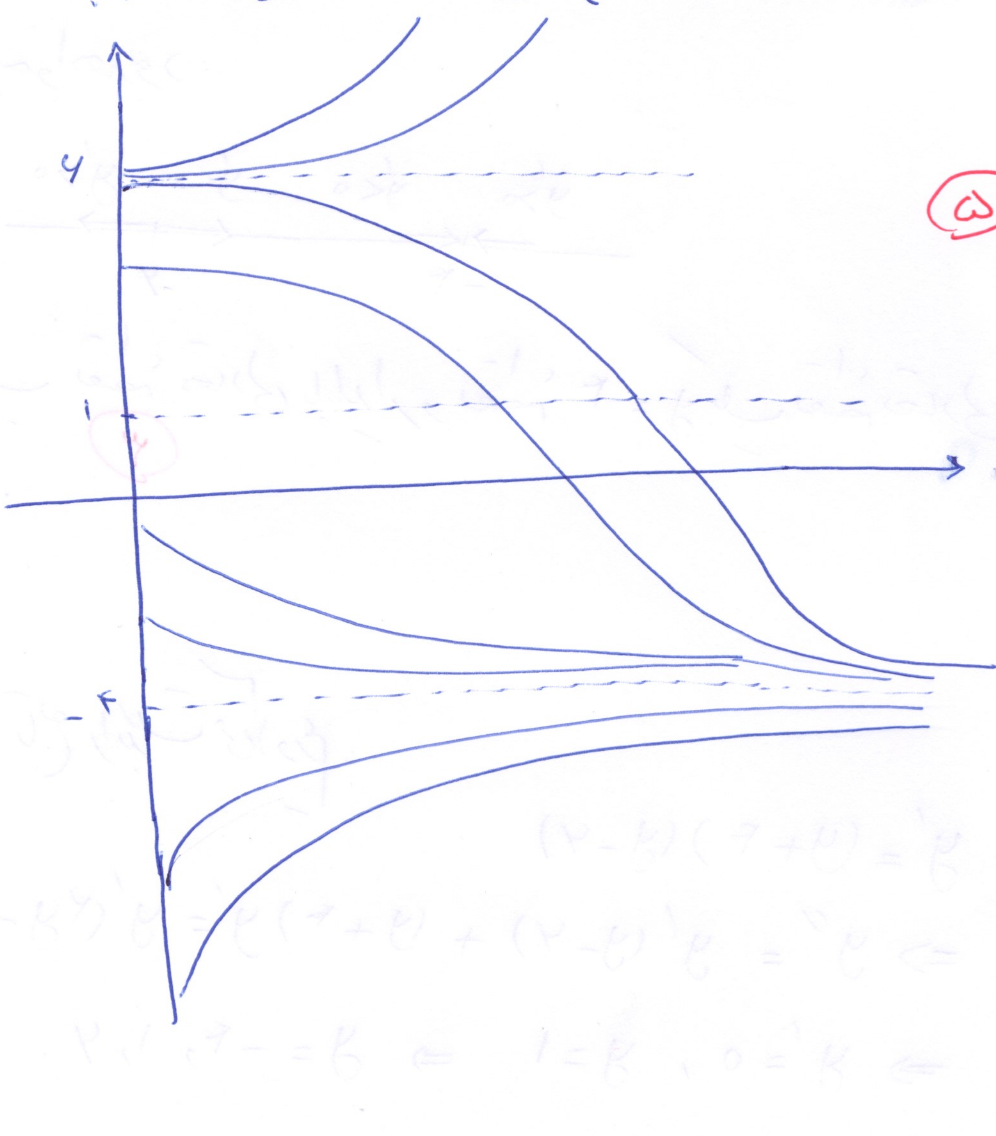
۴

پس روی بازه (−∞,−۴) تابع y صعودی و تقعر آن رو به پایین است،

روی بازه (−۴,۱) تابع y نزولی و تقعر آن رو به بالا است.

روی بازه (۱,۶) تابع y نزولی و تقعر آن رو به پایین است،

و روی بازه (۶,∞) تابع y صعودی و تقعر آن رو به بالا است.



۵

...ام

پاسخ سوال ۲ معادلات مبانی

$$xy'(x-1+xe^y)=1$$

ابتدا با تعویض نقش متغیر مستقل x و وابسته y معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$x\frac{dy}{dx}(x-1+xe^y)=1 \Longrightarrow \frac{dx}{dy}=x^2-x+x^2e^y$$ ۲

با مرتب کردن معادله اخیر، یک معادله دیفرانسیل برنولی بدست می‌آید:

$$x'+x=(1+e^y)x^2$$ ۳

با ضرب طرفین معادله برنولی در x^{-2} داریم:

$$x'x^{-2}+x^{-1}=1+e^y$$ ۲

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $z=x^{-1}$ در معادله اخیر به معادله خطی زیر می‌رسیم

$$z'-z=-(1+e^y)$$ ۳

برای یافتن جواب معادله اخیر، عامل انتگرال‌ساز $\mu(y)=e^{-\int 1dy}=e^{-y}$ را در طرفین معادله ضرب کرده داریم:

۲

$$\frac{d}{dy}(e^{-y}z)=-(e^{-y}+1)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین تساوی اخیر بدست می‌آوریم:

۲

$$e^{-y}z=e^{-y}-y+c$$

$$z=1-ye^y+ce^y \xrightarrow{z=x^{-1}} \frac{1}{x}=1-ye^y+ce^y$$ ۱

حل دیفرانسیل ۳ عامله

$$\left[\frac{1}{x}\cos(x+y) - \sin(x+y)\right]dx - \sin(x+y)\,dy = 0$$

$$M_y = -\frac{1}{x}\sin(x+y) - \cos(x+y)$$

$$\Rightarrow N_x \neq M_y \Rightarrow$$ معادله کامل نیست ۱ نمره

$$N_x = -\cos(x+y)$$

$$R = \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-\frac{1}{x}\sin(x+y) - \cancel{\cos(x+y)} + \cancel{\cos(x+y)}}{-\sin(x+y)} = \frac{1}{x} = R(x)$$ ۱ نمره

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int R(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$ ۱ نمره

طرفین معادله را در عامل انتگرال ساز $\mu(x) = x$ ضرب می‌کنیم ، داریم:

$$\underbrace{\left[\cos(x+y) - x\sin(x+y)\right]}_{M}dx \underbrace{- x\sin(x+y)}_{N}\,dy = 0$$ ۱ نمره

$$\left.\begin{array}{l} M_y = -\sin(x+y) - x\cos(x+y) \\ N_x = -\sin(x+y) - x\cos(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow$$ معادله کامل است $\Rightarrow \exists\, \psi(x,y)$ ۱ نمره

$$\left\{\begin{array}{l} \psi_x = M \\ \psi_y = N \end{array}\right. \Rightarrow \psi = \int N\,dy = \int -x\sin(x+y)\,dy = x\cos(x+y) + h(x)$$

مشتق نسبت به x

$$\psi_x = \cos(x+y) - x\sin(x+y) + h'(x)$$ ۲ نمره

از مقایسه رابطه فوق با $\psi_x = M$ داریم $h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C_0$ ۱ نمره

$$\Rightarrow \boxed{x\cos(x+y) = C}$$ جواب عمومی معادله ۲ نمره

حل و بارم سوال ۴ معادلات دیفرانسیل (میان ترم) ترم اول ۹۸-۹۷

الف)

$y''-2y'+2y=0$ معادله مشخصه $r^2-2r+2=0$

$$r_1,r_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{-1}}{2}=\frac{2\pm 2i}{2}$$

$$=1\pm i$$

$y_1=e^{x}\cos x \quad y_2=e^{x}\sin x \quad y_g=e^{x}[c_1\cos x+c_2\sin x]$

(۳)

ب)

$$y''-2y'+2y=xe^{x}\cos x+x^2e^{-x}+(x+2)$$

فرم جواب خاص

$y''-2y'+2y=xe^{x}\cos x \Rightarrow y_{p_1}=xe^{x}[(A_0+A_1x)\cos x+(B_0+B_1x)\sin x]$

$\alpha=1 \quad \beta=1$ $\quad 1\pm i=\alpha\pm\beta i$

$n=1$ $\quad s=1$ ریشه هست پس

(۴)

$y''-2y'+2y=x^2e^{-x} \Rightarrow$

$y_{p_2}=x^0e^{-x}[c_0+c_1x+c_2x^2]$

$=e^{-x}[c_0+c_1x+c_2x^2]$

ریشه نیست $\alpha=-1$

$n=2$

(۴)

$y''-2y'+2y=(x+2) \Rightarrow y_{p_3}=D_0+D_x$

ریشه نیست $\alpha=0 \quad s=0$

$n=1$

(۴)

$$y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$$

دانشگاه صنعتی اصفهان

نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

حل و یا رم سئوال ۵ معادلات

$xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 5e^x$

y_1, y_2 : دو جواب مستقل معادله همگن تکمیلی $\Rightarrow$ جواب عمومی معادله همگن تکمیلی $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ (1)

y_p : یک جواب خاص معادله ناهمگن $\Rightarrow$ جواب عمومی معادله ناهمگن $y_g = y_h + y_p = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$ (1)

$y_1 = e^x \Rightarrow$ روش کاهش مرتبه $y_2 = vy_1$ ، $v = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)\,dx}\,dx$ (1)

معادله همگن تکمیلی: $xy'' - 2(x-1)y' + (x-2)y = 0 \Rightarrow y'' - 2(1-\frac{1}{x})y' + (1-\frac{2}{x})y = 0$ (1)

$p(x) = -2(1-\frac{1}{x}) = -2 + \frac{2}{x}$

$v = \int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int(-2+\frac{2}{x})dx}\,dx = \int \frac{1}{e^{2x}} \cdot e^{-(-2x+2\ln x)}\,dx = \int e^{\ln\frac{1}{x^2}}\,dx = \int \frac{dx}{x^2} = -$ (3)

$\Rightarrow y_2 = vy_1 = (-\frac{1}{x})e^x = -\frac{e^x}{x}$

$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2(-\frac{e^x}{x})$ جواب عمومی معادله همگن تکمیلی (1)

روش تغییر پارامتر: $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$ ، $u_1 = \int \frac{-gy_2}{W(y_1,y_2)}$ ، $u_2 = \int \frac{gy_1}{W(y_1,y_2)}$ (2)

شکل دیگر معادله: $y'' - 2(1-\frac{1}{x})y' + (1-\frac{2}{x})y = 5(\frac{e^x}{x}) \Rightarrow g(x) = 5(\frac{e^x}{x})$ (1)

$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$ (1)

$$u_1 = \int \frac{-5\left(\frac{e^x}{x}\right)\left(-\frac{e^x}{x}\right)}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\, dx = \int 5\, dx = 5x$$ 1.5

$$u_2 = \int \frac{5\left(\frac{e^x}{x}\right)\cdot e^x}{\frac{e^{2x}}{x^2}}\, dx = \int 5x\, dx = \frac{5}{2}x^2$$ 1.5

جواب خاص معادله ناهمگن: $y_p = (5x)e^x + \left(\frac{5}{2}x^2\right)\left(-\frac{e^x}{x}\right) = \frac{5}{2}xe^x$ 1

جواب عمومی معادله ناهمگن: $y_g = c_1 e^x + c_2\left(-\frac{e^x}{x}\right) + \frac{5}{2}xe^x$ 1