سوال ۳.

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ -t \end{pmatrix}$$

پاسخ.

الف)

$$A - rI = \begin{pmatrix} -r & -1 & 0 \\ -1 & -r & 0 \\ 1 & 0 & -1-r \end{pmatrix} \quad \det(A - rI) = (-1-r)(r^2 - 1) = 0$$

در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس ضرائب برابر است با $r_1 = 1$ و $r_2 = r_3 = -1$. (۳ نمره)

بردار ویژه نظیر $r_1 = 1$ جواب دستگاه زیر است.

$$(A - r_1 I)V^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 - 2v_3 = 0 \end{cases}$$

(۳ نمره)

بنابراین یک جواب معادله $X^{(1)} = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ است. (۲ نمره)

بردار ویژه نظیر $r_2 = -1$ جواب دستگاه زیر است.

$$(A - r_2 I)V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases}$$

(۳ نمره)

بنابراین یک جواب معادله $X^{(2)} = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ است. (۲ نمره)

برای یافتن جواب سوم دستگاه $(A - r_2 I)^2 V = 0$ را حل می‌کنیم. پس داریم

$$(A + I)^2 V^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(۳ نمره)

در نتیجه $v_1 = v_2$ و جواب سوم به صورت زیر است.

$$X^{(3)} = e^{-t}[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}] = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

(۲ نمره)

جواب عمومی دستگاه همگن به صورت زیر است.

$$X = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & e^{-t} \\ -2e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

(۲ نمره)

ب) برای یافتن جواب عمومی دستگاه غیر همگن کافی است یک جواب خاص از دستگاه غیر همگن را بیابیم. اگر $\psi(t)$ ماتریس اساسی جواب دستگاه همگن فوق باشد، داریم $X^p = \psi(t)U(t)$ که

$$\psi(t)U'(t) = \begin{pmatrix} ۰ \\ t \\ -t \end{pmatrix}$$

(۲ نمره)

در نتیجه داریم

$$\begin{pmatrix} ۲e^t & ۰ & e^{-t} \\ -۲e^t & ۰ & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_۱ \\ u'_۲ \\ u'_۳ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ \\ t \\ -t \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{cases} ۲e^t u'_۱ + e^{-t}u'_۳ = ۰ \\ -۲e^t u'_۱ + e^{-t}u'_۳ = t \\ e^t u'_۱ + e^t u'_۲ + te^{-t}u'_۳ = -t \end{cases}$$

(۲ نمره)

بنابراین

$$u'_۳ = \tfrac{۱}{۲}(te^t) \implies u_۳ = \tfrac{۱}{۲}(te^t - e^t)$$ (۳ نمره)

$$u'_۱ = \tfrac{۱}{۴}(-te^{-t}) \implies u_۱ = \tfrac{۱}{۴}(te^{-t} + e^{-t})$$ (۳ نمره)

$$u'_۲ = -\tfrac{۳}{۴}(te^t) - \tfrac{۱}{۲}t^۲e^t \implies u_۲ = -\tfrac{۱}{۲}t^۲e^t + \tfrac{۱}{۴}te^t - \tfrac{۱}{۴}e^t$$ (۳ نمره)

و جواب عمومی دستگاه غیرهمگن برابر است با

$$X = \begin{pmatrix} ۲e^t & ۰ & e^{-t} \\ -۲e^t & ۰ & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_۱ + \tfrac{۱}{۴}(te^{-t} + e^{-t}) \\ c_۲ - \tfrac{۱}{۲}t^۲e^t + \tfrac{۱}{۴}te^t - \tfrac{۱}{۴}e^t \\ c_۳ + \tfrac{۱}{۲}(te^t - e^t) \end{pmatrix}$$

(۲ نمره)