پاسخ سؤال ۱

$$z = x + iy$$

$$Re\left(4z+\frac{1}{z}\right) \leq 0 \Rightarrow 4x+\frac{x}{x^2+y^2} \leq 0$$

$$Im\left(4z+\frac{1}{z}\right) = 0 \Rightarrow 4y-\frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

۱۵

$$x\left(4+\frac{1}{x^2+y^2}\right) \leq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$y\left(4-\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$$ یا $$x^2+y^2=\frac{1}{4}$$

بنابراین $Log\left(4z+\frac{1}{z}\right)$ در $\mathbb{C}-E$ تحلیلی است

$$E = \{(x,0) : x \leq 0\} \cup \left\{x^2+y^2=\frac{1}{4},\ x \leq 0\right\}$$

طبق فرمول انتگرال کوشی

$$|z-4i|=1$$

$$\int \frac{Log\left(4z+\frac{1}{z}\right)}{z-4i}\,dz = 2\pi i\, Log\left(16i+\frac{1}{4i}\right)$$

$$= 2\pi i\, Log\left(16i-\frac{i}{4}\right) = 2\pi i\, Log\left(\frac{63i}{4}\right)$$

$$= 2\pi i\left(Ln\frac{63}{4} + i\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 + \left(2\pi\, Ln\frac{63}{4}\right)i$$

$$= a + ib \qquad a=-\pi^2,\ b = 2\pi\, Ln\frac{63}{4}$$

۱۰

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-2i)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z-2i}=\frac{(A+B)z-2iA-Bi}{(z-i)(z-2i)}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}A+B=0\\-2Ai-Bi=1\end{cases}\Longrightarrow\quad A=-B,\quad A=\frac{-1}{2i}=i/2\ ,\quad B=-i/2$$

$$\Longrightarrow f(z)=\frac{i/2}{z-i}+\frac{-i/2}{z-2i}\quad 5\qquad 1<|z|<2$$

$$\frac{i/2}{z(1-i/z)}=\frac{i/2}{z}\times\sum_{n=0}^{\infty}(i/z)^n\quad 10\qquad |i/z|<1\Rightarrow \underline{|z|>1}$$

$$\frac{-i/2}{z-2i}=i/2\times\frac{1}{4i-z}=i/2\times\frac{1}{2i}\times\frac{1}{1-z/4i}=\frac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n\quad 10$$

$$|z|<2\ \Longleftarrow\ \left|\frac{z}{4i}\right|<1$$

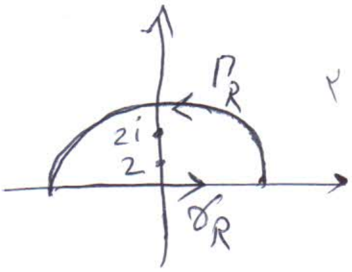
$$\Longrightarrow f(z)=i/2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}+1/12\sum_{n=0}^{\infty}(z/2i)^n$$

که اگر هر دو سری درست جمع شده و ناحیه همگرایی مشخص شده باشد (۱۵ نمره)

پاسخ سوال دو

پاسخ سوال ۳

$$f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$$



$$C_R=\gamma_R+\Gamma_R$$

$z=i$ ، $z=2i$ قطب‌های ساده f در داخل C_R هستند

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\frac{-i}{6}e^{-1}\quad,\quad \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)=\frac{i}{12}e^{-2}$$

$$2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\right)=\int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$2\pi i\left(-\frac{i}{6}e^{-1}+\frac{i}{12}e^{-2}\right)=\int_{\gamma_R} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz$$

$$\pi\left(\frac{e^{-1}}{3}-\frac{e^{-2}}{6}\right)=\int_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz \quad (*)$$

نشان می‌دهیم $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz=0$. روی C_R داریم

$$|z^2+1|\geq |z^2|-1=|z|^2-1=R^2-1$$

$$|z^2+4|\geq |z^2|-4=|z|^2-4=R^2-4 \qquad |e^{iz}|=|e^{ix}e^{-y}|=e^{-y}\leq 1 \quad (y\geq 0)$$

$$|f(z)|=\frac{|e^{iz}|}{|z^2+1||z^2+4|}\leq\frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right|\leq\frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \rightarrow \lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz=0$$

$$\xrightarrow[R\to+\infty]{(*)} \pi\left(\frac{e^{-1}}{3}-\frac{e^{-2}}{6}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\pi\left(\frac{e^{-1}}{3}-\frac{e^{-2}}{6}\right)\rightarrow \int_{0}^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx=\pi\left(\frac{e^{-1}}{6}-\frac{e^{-2}}{12}\right)$$

دانشگاه [illegible] اصفهان

کلید (ترم) سوال ۴

- نام و نام خانوادگی: .... شماره دانشجوئی: .... نام درس: ....

گروه درس: .... نام استاد: .... تاریخ: .... نمره: ....

$$e^z+3=0 \Rightarrow e^z=-3 \Rightarrow z=\log(-3)=\ln|-3|+i\arg(-3)$$

$$\Rightarrow z=\ln(3)+i(\pi+2k\pi)\ ;\ k\in\mathbb{Z}=\{0,\pm1,\pm2,\dots\}$$

$$\Rightarrow |z|>\ln(3)>\ln(e)=1.$$ ۷,۵

$$z^3+2=0 \Rightarrow z^3=-2 \Rightarrow (re^{i\theta})^3=2e^{i(\pi+2k\pi)} \Rightarrow r^3=2,\ 3\theta=\pi+2$$

$$\Rightarrow r=\sqrt[3]{2}>1,\quad \theta=\frac{\pi+2k\pi}{3},\ k=0,\pm1.$$ ۷,۵

مقدار انتگرال بنابر قضیه کوشی-گورسا صفر می شود چون شرایط این قضیه برقرار است، یعنی تابع زیر انتگرال درون و روی خم ساده و بسته $|z|=1$ تحلیلی است و درنتیجه $\oint_{C:|z|=1} g(z)dz=0$. ۷,۵

اشاره به قضیه کوشی-گورسا ۲,۵ نمره و

اثبات تام بودن تابع $f(z)$ و درنتیجه تام بودن $f'(z)$ ۷,۵ نمره که شامل موارد زیر است

اثبات مشتق پذیری f درمبدأ $(z=0)$ (۵ نمره)

$$\lim_{z\to0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{z\to0}\frac{\frac{e^{z^2}-1}{z^2}-1}{z}=\lim_{z\to0}\frac{e^{z^2}-1-z^2}{z^3}=\lim_{z\to0}\frac{O(z^4)}{z^3}=0$$

$$\Rightarrow f'(0)=0.$$

بیان اینکه برای $z\neq0$ تابع $f(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^2}$ مشتق پذیر است باذکر دلیل. ۲,۵ نمره

راه دوم استفاده از بسط تیلور:

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\quad(z\in\mathbb{C})$$

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\frac{z^6}{3!}+\cdots\quad(z\in\mathbb{C})$$ ۷,۵

$$z\neq0 \Rightarrow \frac{e^{z^2}-1}{z^2}=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{3!}+\cdots \underset{\text{طبق فرض}}{\equiv} f(z)$$ تام $\Longrightarrow$ $f'(z)$ تام.

$f'(z)=z+\frac{4}{3!}z^3+\cdots$ تام