

بسمه تعالی

سری اول تمرینات درس مبانی ماتریس ها و جبر خطی

(۱) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای ماتریس ها هستند؟ پاسخ خود را با ذکر دلیل بیان کنید.

- (i) $\{A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{i=1}^n a_{1i} = 0\}$
- (ii) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n)A = 0\}$
- (iii) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$
- (iv) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid 3A^T + A - 5I = 0\}$
- (v) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 4\det(A)\}; \quad (\text{tr}[a_{ij}] := \sum_{i=1}^n a_{ii})$
- (vi) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$
- (vii) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A + A^T = 0\}$
- (viii) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T = 0\}$
- (ix) $\{B \in M_n(\mathbb{R}) \mid AB = BA\}; \quad (A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ is fixed.})$
- (x) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^T J A = J\}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$
- (xi) $\{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid J A + A^T J = 0\}$
- (xii) $\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3\}$.

(۲) از مجموعه های زیر کدامیک زیرفضای توابع حقیقی هستند؟ چرا؟

- (i) $\{y = f(x) \mid f(1) = 0\}$
- (ii) $\{y = f(x) \mid f''(x) + x f(x) = 0\}$
- (iii) $\{y = f(x) \mid f'(x) = 1 + 2f(x)\}$
- (iv) $\{y = f(x) \mid f(x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}\}$
- (v) $\{y = f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 0\}$
- (vi) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = -p(x)\}$
- (vii) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p(-x) = 2p(x)\}$
- (viii) $\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] \mid p''(0) = 0\}$.

(۳) ماتریس R تحویل شده سطری پلکانی نظیر A را بدست آورید هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(۴) فرم ماتریس های $n \times n$ مانند A را مشخص کنید به طوری که $e_{12}A = Ae_{12}$ که در آن e_{12} ماتریسی است که تمام درایه های آن صفرند بجز درایه $(1, 2)$ آن که برابر با یک است.

(۵) وارون ماتریس های زیر را در صورت وجود بیابید:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(۶) نشان دهید که اگر $U^2 = I$ و $I + U$ وارون پذیر باشد، آنگاه $U = I$.
 (۷) ماتریس مربعی E را خودتوان گوئیم، هرگاه $E^2 = E$. نشان دهید که
 (الف) تنها ماتریس خودتوان وارون پذیر، ماتریس همانی است.
 (ب) اگر ماتریس A خودتوان باشد، آنگاه ماتریس $I - 2A$ وارون پذیر است.