دانشگاه صنعتی اصفهان

امتحان میان‌ترم ریاضی عمومی ۲، ۷ اردیبهشت ۱۴۰۲

مدت آزمون: ۱۳۰ دقیقه، بارم: ۷ نمره

نام و نام خانوادگی: .... شمارهٔ دانشجویی: .... نام استاد درس: ....

سوال ۱. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y)=\begin{cases} y\cos\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\[2mm] 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

الف) فرض کنید $\vec{u}=(a,b)$ یک بردارِ یکهٔ دلخواه باشد. مشتق سویی تابع f در نقطهٔ $(0,0)$ در جهت بردارِ $\vec{u}$، یعنی $D_{\vec{u}}f(0,0)$، را محاسبه کنید. (۱۰ نمره)

ب) همهٔ بردارهای یکهٔ $\vec{u}=(a,b)$ را بیابید که در جهت آنها فرمولِ $D_uf(0,0)=f_x(0,0)a+f_y(0,0)b$ برقرار است. (۱۰ نمره)

جواب الف:

$$Df_{\vec{u}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+at,0+bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)}{t}$$ ۴ نمره

$$=\lim_{t\to 0}\frac{b\,t\cos(\frac{a^2t^2}{a^2t^2+b^2t^2})}{t}=\lim_{t\to 0}b\cos(a^2)=b\cos(a^2).$$ ۶ نمره

جواب ب:

$f(x,0)=0 \implies f_x(x,0)=0 \implies f_x(0,0)=0$ ۲ نمره

$f(0,y)=y \implies f_y(0,y)=1 \implies f_y(0,0)=1$ ۲ نمره

$D_uf(0,0)=f_x(0,0)a+f_y(0,0)b \implies b\cos a^2=0a+1b=b \implies b=0$ یا $\cos a^2=1$ ۲ نمره

$b=0,\ a^2+b^2=1 \implies a^2=1 \implies a=\pm 1 \implies \vec{u}=\pm\vec{i}$ ۲ نمره

$\cos a^2=1 \implies a^2=0 \implies b^2=1 \implies b=\pm 1 \implies \vec{u}=\pm\vec{j}$ ۲ نمره

سوال ۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتقات جزئی ناصفر باشد. همچنین فرض کنید که معادلهٔ ضمنیِ زیر

$$f(x+ay+z,2x+y+z)=0$$

متغیر z را به صورت تابعی از متغیرهای x,y مشخص کند. مقدارِ a را به گونه‌ای تعیین کنید که معادله زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-3.$$

(۱۵ نمره)

جواب: قرار می‌دهیم $u = x + ay + z$، $v = 2x + y + z$ و $g(x, y, z) = f(x + ay + z, 2x + y + z) = f(u, v) = 0$.
در این صورت با استفاده از فرمول مشتق ضمنی و قاعده زنجیره‌ای برای مشتق ترکیب توابع داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g_x}{g_z} = -\frac{f_u + 2f_v}{f_u + f_v}, \quad \text{۵ نمره}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{g_y}{g_z} = -\frac{af_u + f_v}{f_u + f_v}, \quad \text{۵ نمره}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{(a+1)f_u + 3f_v}{f_u + f_v} = -3 \iff a + 1 = 3 \iff a = 2. \quad \text{۵ نمره}$$

سوال ۳. تابعِ

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^4 + y^2}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را در نظر بگیرید.

الف) نشان دهید که f در مبدأ مشتق‌پذیر است. (۱۰ نمره)

ب) نشان دهید که تابعِ دومتغیرهِ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$ در مبدأ پیوسته نیست. (۱۰ نمره)

ج) $f_{yx}(0, 0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ را محاسبه کنید. (۵ نمره)

پاسخ قسمت الف. راه حل اول:

برای این که تابعِ f در نقطهٔ $(0, 0)$ مشتق‌پذیر باشد باید $f_x(0, 0)$ و $f_y(0, 0)$ هر دو وجود داشته باشند و به علاوه:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0 + h_1, 0 + h_2) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h_1 - f_y(0, 0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0. \quad (*)$$

برای تابع فوق داریم:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

و

$$f_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin(\frac{1}{y^2})}{y} = \lim_{y\to 0} y \sin(\frac{1}{y^2}) = 0$$

پس حد $(*)$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_2^2 \sin(\frac{1}{h_1^4 + h_2^2})}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

(پنج نمره). حاصل حد فوق برابر با صفر است زیرا

$$0 \leq \left|\frac{h_2^2 \sin(\frac{1}{h_1^4 + h_2^2})}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}\right| \leq \left|\underbrace{\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}_{\text{کراندار}} \times \underbrace{h_2}_{\text{میل‌کننده‌به‌صفر}} \times \underbrace{\sin(\frac{1}{h_1^4 + h_2^2})}_{\text{کراندار}}\right|$$

(پنج نمره). پاسخ قسمت الف. راه حل دوم:

برای اثبات مشتق‌پذیری تابع f در نقطهٔ $(0,0)$ توابعِ پیوستهٔ دو متغیرهٔ ϵ_1, ϵ_2 را چنان پیدا کنیم که

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = \epsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \epsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y$$

و

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_1(\Delta x, \Delta y) = \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \epsilon_2(\Delta x, \Delta y) = (0,0)$$

(پنج نمره) داریم

$$f(0+\Delta x, 0+\Delta y) = \Delta y^2 \sin(\frac{1}{\Delta x^4 + \Delta y^2})$$

کافی است ϵ_1 را تابع ثابتِ صفر و $\epsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ را تابعِ $\Delta y \sin(\frac{1}{\Delta x^4+\Delta y^2})$ در نظر بگیریم. (پنج نمره؛ البته پس از تحقیق این که این توابع به صفر میل می‌کنند).

پاسخ قسمت ب. داریم

$$f_y(x,y) = \begin{cases} 2y\sin(\frac{1}{x^4+y^2}) + \frac{-2y^3}{(x^4+y^2)^2\cos(\frac{1}{x^4+y^2})} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

(پنج نمره) تابع فوق در $(0,0)$ پیوسته نیست؛ زیرا در مسیرِ $x=0$ داریم

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to0} \frac{-2y^3}{y^4}\cos(\frac{1}{y^2}) + 2y\sin(\frac{1}{x^4+y^2})$$

حد فوق موجود نیست، زیرا حد قسمت دوم سمت راست صفر است و $\lim_{y\to0}\frac{-2y^3}{y^4}\cos(\frac{1}{y^2})$ وجود ندارد. (پنج نمره)

پاسخ قسمت ج.

داریم (پنج نمره)

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{0-0}{x} = 0.$$

سوال ۴. نقطه‌ای از رویهٔ S به معادله $z = x^2 - y^2 + 2x$ را بیابید که صفحهٔ مماس بر S در آن نقطه با صفحهٔ $x + y - \frac{1}{2}z = 0$ موازی باشد. (۱۰ نمره)

پاسخ) ابتدا معادله رویه S را به صورت زیر می نویسیم

$$S : f(x,y,z) = z - x^2 + y^2 - 2x = 0$$

فرض کنیم π_0 صفحه مماس بر رویه S در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و π نیز صفحه $x+y-\frac{1}{2}z=0$ باشد. در این صورت بردار $\vec{\nabla} f(p_0)$ یک بردار هادی برای صفحه π_0 خواهد بود. بنابراین

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-2 \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{\nabla} f(p_0) = \begin{pmatrix} -2x_0-2 \\ 2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \pi_0$$

(۴ نمره)

از طرفی بردار $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ نیز یک بردار نرمال برای صفحه π می باشد. می دانیم صفحه π_0 با صفحه π موازی است اگر و تنها اگر بردارهای نرمال آنها با هم موازی باشد، یعنی

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -2x_0 - 2 \\ 2y_0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{\nabla} f(p_0).$$

(۳ نمره)

به عبارت دیگر باید داشته باشیم

$$\frac{-2x_0 - 2}{1} = \frac{2y_0}{1} = \frac{1}{\frac{-1}{2}} = -2 \Longrightarrow y_0 = -1, x_0 = 0$$

با جایگذاری x_0 و y_0 در معادله S، z_0 را نیز به صورت زیر بدست می آوریم

$$z_0 = x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 = -1.$$

به این ترتیب صفحه مماس بر رویه S در نقطه $(0, -1, -1)$ با صفحه π موازی خواهد بود. (۳ نمره)