تجاهُلِ بورْباکی

اِیْ. آر. دی. ماتیاس [1]

مترجم: محسن خانی [2]

۱ شهریور ۱۳۹۵

[1] A. R. D. Mathias
[2] Mohsen Khani

مقدمه‌ی مترجم

در طی چند سال گذشته که در دانشگاه فرایبورگ (در آلمان) شاغل بودم، گاهگاه فرصتی دست می‌داد تا با «آدریان ماتیاس» ملاقات و گفتگو داشته باشم. ماتیاس را در نظریه‌ی مجموعه‌ها، بیشتر به اعتبارِ «ماتیاس فُرسینگ» می‌شناسند. ولی، همصحبتی من با او، برای بحث درباره‌ی ریاضیات، فلسفه و سیاست بود، و کتابهایی که معرفی می‌کرد و کتابهایی که می‌نوشت.

روزی سر ناهار، سخن از «تجاهل بورباکی» به میان آمد. پس از خواندن چند سطر نخستِ آن مقاله، بر آن شدم که به فارسیش برگردانم. پیچیدگی نوع نوشتن ماتیاس، دخیل بودن چند زبان در مقاله، و نیز بحثهای شیرینی که در آن شده بود، لذت ترجمه را برایم دوچندان کرده بود. در زیر، توضیح کوتاهی درباره‌ی محتوای آن آورده‌ام.

در قرن گذشته‌ی میلادی، کتابها و مقاله‌های عمیق و ارزشمندی در حوزه‌های مختلف ریاضیات تحتِ نامِ «نیکُلا بورباکی»، منتشر شد. دیری نپایید که معلوم کردند که بورباکی، نه یک نفر، که متشکل از گروهی بود از ریاضیدانان فرانسوی که، به انگیزه‌ی عَرضه‌ی ریاضیات به سبک فرانسوی و به شهرت رساندن نام یک ریاضیدان از آن کشور، تحت این نامِ مشترک می‌نگاشته‌اند. در مقاله‌ی «تجاهل بورباکی»، نوع نگاه آنها به «مبانی ریاضیات» به نقد کشیده شده است.

در همین قرن، و در مواجهه با پرسش دقت ریاضی، دو رویداد مهمِ همزمان، دو ریاضیدان را مقابل یکدیگر قرار داده است. یکی از آنها «هیلبرت» است که با خوش‌بینی و ابراز اطمینان، مُدّعی شده است که می‌توان برای ریاضیات مجموعه‌ی کمینه‌ای از اصول را در نظر گرفت، به طوری که هر گزاره‌ی درست ریاضی نتیجه‌ای منطقی از آنها باشد و نیز نادرستی هر گزاره‌ی نادرستی، به طور منطقی، با کمک آنها ثابت شود. به بیان دیگر، او مدّعیِ وجود یک «اصلبندی کامل و مطلوب» برای ریاضیات شده است. «مطلوب» بودن این اصلبندی، به عنوان مثال، باید این امکان را فراهم آورد که رایانه‌ای ساخته شود که به جای ریاضیدانان فکر، و قضیه تولید و اثبات کند. اما گودل، در فاصله‌ی زمانیِ نه چندان زیادی از این ادعای هیلبرت، ثابت کرده است که ریاضیات را نمی‌شود اصل‌بندی کرد. در هر اصل‌بندیِ دارای ویژگی‌های مطلوب از ریاضیات، جمله‌ای پیدا می‌شود که این اصل‌بندی درباره‌ی درستی و نادرستی آن نتواند تصمیم بگیرد. این قضیه، تحت نام «قضیه‌ی دوم ناتمامیت گودل» مشهور است.

قضیه‌ی ناتمامیت، شاید بسیاری ریاضیدانان از جمله هیلبرت را ناامید و متحیر کرده و آنها را به واکنش واداشته بوده باشد. در این میان، نوع برخورد بورباکی با آن، عجیب به نظر می‌رسد. از نظر ماتیاس، بورباکی با این که از قضیه‌ی ناتمامیت مُطّلع است، خود را به تجاهل زده و بدون آوردن نامی از گودل، بر این اصرار ورزیده که ریاضیات، همانگونه که هیلبرت پیش‌بینی کرده، دارای اصل‌بندی کامل است. به قول ماتیاس: «مَثَلشان به کسانی می‌ماند که خود را در جزیره‌ای یافته‌اند که در آن اژدهایی هست و در پاسخ، به خودباورانده‌اند که تا بر اژدها نامی ننهند، وجود ندارد».

در ادامه‌ی مقاله، ماتیاس پیشنهاد کرده است که باید شهود هندسی و حسابی را در ریاضیات جداازهم نگریست. اصول زرملو، شاید برای بخش هندسی ریاضیات کارآمد باشند؛ ولی، برای درک بخش حسابی ریاضیات، نیازمندِ اصول زرملو ـ فرانکل هستیم.

این ترجمه را برای خداحافظی، به آدریان ماتیاس پیشکش می‌کنم.

تجاهُلِ بورْباکی

در تاریخ ریاضیات دوره‌هائی هست که در آنها خلاقیت به حدِّ انفجار می‌رسد. در این دوره‌ها ایده‌های تازه، پیشی‌جویانه و از این رو گاهی عجولانه منتشر می‌شوند. نیز در دوره‌هائی افراد درمی‌یابند که ایده‌های رایج، نادقیق، نامفهوم و گاهی ناسازگار با همند. در این دوره‌های دوم گرایش عمومی بیشتر به استوارسازی یافته‌های گذشتگان است.

گفتم «تاریخ ریاضیات»؛ ولی ریاضیات یک اندامگان [۱] پیچیده‌ی اجتماعی است که رشد آن در شاخه‌ها و در کشورها و حتی در دانشگاه‌های مختلف با روش‌ها و سرعت‌های متفاوت روی می‌دهد. چه‌بسا کسانی در دوره‌ای احساس کنند که ریاضیات در کشورشان وضع خوشایندی ندارد: نمونه‌ای از چنین اظهاری در کتابِ «ریاضیات محض» [۲] نوشته‌ی هاردی [۳] یافت می‌شود. به اقرار نویسنده، این کتاب از سرِ غیرت و در تقابل با خودمحوری ریاضیدانان انگلیسی در گردش قرن و کم‌اعتنائیِ آنان به پیشرفت‌های ریاضی در قرن نوزده در فرانسه نوشته شده است.

فرانسه در ۱۹۱۰ [۴] مفتخر به سلسله‌ی ریاضیدانان بزرگی چون لژاندر، لاگرانژ، لاپلاس، فوریه، کشی، گالوا، هادامارد و پوانکاره [۵] بود که فهرست بی‌شک تحسین‌برانگیزی از دانشگاهیان برجسته است.

ولی پس از جنگ نخست جهانی، حال و هوای حاکم عوض شد و ریاضیدانان جوان آن روز

[۱] organism

[۲] Pure Mathematics

[۳] Hardy

[۴] ۱۲۸۹ شمسی

[۵] Legendre, Laplace, Lagrange, Fourier, Cauchy, Galois, Hadamard, Poincaȑe

به تدریج پنداشتند که مشعل ریاضیات دیگر از کف آنها خارج شده و به دست آلمانی‌ها افتاده و ریاضیات فرانسه رو به اُفول است. درست همان زمان در آلمان ریاضیدانان بزرگی چون کلاین، هیلبرت، وایل، آرتین، نوتر، لاندو و هاسدروف [۶] بنای ریاضیاتشان را بر پایه‌ی آثار گذشتگانی چون ریمان، فروبینیوس، ددکیند، کومر، کرونکر، مینکفسکی و کانتور [۷] روز به روز استوارتر می‌ساختند.

در ۱۹۳۵، گروهی از ریاضیدانان جوان فرانسوی [۸] برآن شدند که برای احیای مکتب از کف رفته، با نوشتن سلسله کتاب‌هائی تحت نام مستعارِ مشترکِ «نیکُلا بورباکی» ریاضیات را در حوزه‌هائی که خودْ مهم‌ترین می‌پنداشتند با نهایت صلابتِ [۹] فرانسوی عرضه کنند.

در آن زمان در آغاز قرن بیستم کشف یک اشتباه اساسی توسط راسِل در نظریه‌ی پیشنهادی فرِگه برای کلاس‌ها، دقت ریاضی را پرسش روز کرده بود. در نظریه‌ی فرِگه، برای هر خصوصیت $\Phi(y)$ کلاسِ $\{y|\Phi(y)\}$ از اشیائی چون y را که در خاصیت Φ صدق می‌کند در نظر گرفته و در عین حال خودِ این کلاس‌ها را نیز جزء اشیائی می‌گیریم که قاعده‌ی عضویت بر آنها نیز اعمال‌شدنی است. اگر برای «a عضو b است» بنویسیم $a \in b$ و برای «a عضوِ b نیست» بنویسیم $a \notin b$ ، اصل عمومی فرِگه را می‌توانیم به گونه‌ی پیشِ رو بازگوئیم. بیائید $\{y|\Phi(y)\}$ را با C نشان دهیم: آنگاه برای هر شیءِ a، داریم $a \in C$ اگر و تنها اگر $\Phi(a)$. با تعمیم ایده‌ای از کانتور، راسل دریافت که اگر $\Phi(y)$ را خاصیتِ $y \notin y$ بگیریم به تناقض می‌رسیم. فرض کنید B کلاس همه‌ی اشیائی باشد که عضوِ خود نیستند؛ به زبان نمادها: $B = \{y|y \notin y\}$. آنگاه برای هر y، داریم $y \in B$ اگروتنهااگر $y \notin y$. به‌ویژه اگر y خودِ B باشد، داریم $B \in B$ اگر و تنها اگر $B \notin B$.

در مواجهه با این تناقض برخی تصمیم به کنارگذاریِ همه‌ی حوزه‌های نامطمئنی از ریاضی را گرفتند که در آن‌ها مفهوم بی‌نهایت و به ویژه نظریه‌ی اعداد اصلی و اعداد ترتیبی (کاردینالها و

[۶] Klein, Hilbert, Weyl, Artin, Noether, Landau, and Hausdorff

[۷] Riemann, Frobenius, Dedekind, Kummer, Kronecker, Minkowski, and Cantor

[۸] Listed by Chevalley in an interview [M7] as H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. DieudonnG Sz. Mandelbrojt, R. de Possel, and André Weil. In a letter cited in the biography [H3] of Cavaillès by his sister, a further mathematician, Ch. Ehresmann, is mentioned as belonging to the group.

[۹] rigour

اردینالهای) کانتور به کار رفته بودند. از جمله‌ی آنان می‌توان پوانکاره، [۱۰] براور [۱۱] و هرمن وایل [۱۲] را برشمرد.

در عین حال کسانی، از مهم‌ترینشان هیلبرت، این مُثله‌گری همه‌سویه را برنتافته بنای برنامه‌ای را برای صورتگرایی [۱۳] در ریاضیات ـــ زبان، اصول، روش‌های استدلال و غیره ـــ پیشنهاد می‌کردند که طیِ آن بتوان از درستی اصول کاملاً نامشکوک، خالی بودن سیستمی از تناقض یا **سازگاری** آن را ثابت کرد.

گفتم «صورتگرایی در ریاضیات»؛ خودِ این عبارت نیز مبهم است. چه اندازه از ریاضیات را باید یا می‌شود دراین صورت‌بندی گُنجاند؟ شکی نیست که هیلبرت به دنبال حفظ اردینالهای کانتور و صورتگرایی وی برای ریاضیات بود؛ چراکه اگر نامی از کانتور نبود، از هیلبرت هم نامی نمی‌بود. هیلبرت را **قضیه‌ی پایه‌ای** اش [۱۴] مشهور کرده بود. قضیه‌ای که به بیان امروز می‌گوید که اگر همه‌ی ایده‌آلها در حلقه‌ی جابه‌جائی R متناهیاًتولیدشده باشند، آنگاه همه‌ی ایده‌آلها در حلقه‌ی $R[X_1, \ldots, X_n]$ متشکل از چندجمله‌ای‌های با متغیرهای X_1،...، X_n و ضرایبِ در R نیز متناهیاًتولیدشده اند؛ و بنا به مطالعات امروز، اثبات این قضیه نه تنها نیازمند خوش‌بنیادی نوع ترتیبیِ [۱۵] ω^ω است، بلکه به نوعی دقیقاً معادل آن است. [۱۶]

آنجا که هیلبرت از بهشتِ کانتور می‌گفت فقط تعریف بی‌جهت نبود؛ ایجاد چارچوب مفهومیِ استقراءِ فرامتناهی، که رشد هندسه‌ی جبری نیازمند آن بود، تقدیر وی را برانگیخته بود.

خودِ راسل برای رهائی از تناقضاتْ نظریه‌ی دشوارِ تایپ‌ها [۱۷] را پیش نهاد. زِرمِلو [۱۸] در دهه‌ی اوّلِ همان قرن سامانه‌ی ساده‌تری را پیش نهاد؛ نیز در دهه‌ی سوم، فرانکل [۱۹] و اسکولم [۲۰] افزودن

[۱۰] Poincaŕe

[۱۱] Brouwer

[۱۲] Hermann Weyl

[۱۳] formalisation

[۱۴] Hilbert's Basic Theorem

[۱۵] wellfoundedness of the order-type ω^ω

[۱۶] [M۲۱] را ببینید.

[۱۷] Theory of Types

[۱۸] حرفِ «z» در زبانِ آلمانی، «تْز» خوانده می‌شود. از این رو گاهی به جای زرملو، تزرملو نیز می‌نویسند.

[۱۹] Fraenkel

[۲۰] Skolem

اصل جایگزینی [۲۱] را برای تقویت سیستم زِرمِلو پیش نهادند و سامانه‌ی حاصل، اصول زِرمِلو ـ فرانکل نام گرفت. این اصول به‌ویژه به همراه اصل انتخاب (که نخست توسط خودِ زِرمِلو تبیین شده و اکنون در جبر پیشرفته و آنالیز تابعی حائز اهمیتِ بسیار است) واصل خوش‌بنیادی [۲۲] (که توسط نُیْمَن [۲۳] پیشنهاد شد)، اصول **زِدْ اِفْ سی** [۲۴] را شکل دادند که تاکنون سیستم خدمتگزاری نشان داده است. [۲۵]

برنامه‌ی هیلبرت دو شاخص اساسی دارد: بخشِ ابتکاریش که ارائه‌ی سامانه‌ای از اصول است برای کار اندر آن، و بخش منتقدانه‌اش که بناست طی آن کارائی و سازگاری این سامانه آزموده شود. طبیعتاً گروهِ بورباکی، یا بورباکیان،[۲۶] نیز اندیشناک از وجود تناقض در ریاضیات، اهتمام به عرضه‌ی مکتوباتی عاری از این مسائل داشتند و ازاین‌روی نظریه‌ی مجموعه‌ها [۲۷]، نخستین جلد از سلسله مکتوباتشان را به تحکیم پایه‌های لازم ریاضی برای جلدهای بعدی اختصاص دادند.

روزی تصمیم به خواندن این کتاب گرفتم.

از خواندن آن بسیار شوکه شدم. بدان می‌مانست که خالق این اثر، کتاب مبانیِ ریاضیاتِ [۲۸] هیلبرت و آکِرمن و کتاب درس‌هائی درباره‌ی اعداد فرامتناهی [۲۹] از شِرپینسْکی [۳۰] هردو انتشار یافته در ۱۹۲۸ [۳۱] را خوانده ولی پیشرفتهای حاصل‌شده از آن تاریخ به بعد را ندیده باشد.

متعجب از رویکرد بورباکی هم به مبانی و هم به نظریه‌ی مجموعه‌ها به کاوش بیشترِ پیش‌زمینه پرداختم و دریافتم که بورباکیان در ده‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ [۳۲] چندین مقاله منتشر کرده و در آن‌ها

[۲۱] axiom of replacement

[۲۲] axiom of foundation: $x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset)$

[۲۳] Neumann

[۲۴] ZFC, Zermelo, Fraenkle, choice

[۲۵] زرملو در فهرست اصولش در سال ۱۲۸۷ شمسی، اصل انتخاب را نیز گنجانده بود. ولی رسم، این است که اصل انتخاب را جداگانه ذکر می‌کنند.

[۲۶] Bourbachistes

[۲۷] Thèorie des Ensembles

[۲۸] Grundzüge der Mathematik

[۲۹] Leçons sur les nombres

[۳۰] Sierpiǹski

[۳۱] ۱۳۰۷ شمسی

[۳۲] سال ۱۳۰۹ و ۱۳۱۹ شمسی.

مواضعِ گروه را در برابرِ موضوعات پایه به تفصیل بیان کرده‌اند. آنری کارتان و ژان دیودُنه (از اعضای گروه) نیز تحت نام شخصی خود مقالاتی درباره‌ی مبانی ریاضیات نوشته‌اند. پس از جنگ دومِ جهانی نیکُلا بورباکی خود در انجمن منطق نمادین در آمریکا سخنرانی کرده است و این سخنرانی در مجله‌ی منطق سوری به چاپ رسیده است. به‌علاوه وی مقاله‌ای درباره‌ی معماریِ ریاضیات نوشته که به انگلیسی ترجمه شده و در مجله‌ی ماهانه‌ی ریاضی آمریکا به چاپ رسیده است.

در همه‌ی این آثار رَوِیه‌ی واحدی به چشم می‌آید: در وجه ابتکاریشان، نظریه‌ای که برای مجموعه‌ها پیش نهاده‌اند، نظریه‌ی مجموعه‌ی زرملو — تأکید می‌کنم و نه زرملو ـ فرانکل — است که آنها آن را برای همه‌ی ریاضیات کافی دانسته‌اند؛ و در وجه انتقادی‌شان همه از برنامه‌ی صورتگراییِ هیلبرت متأثرند. هیچکدام از آنها نامی از گودل نیاورده‌اند و این برایشان برای اهتمام به برنامه‌ی هیلبرت مهم بوده است. آنان انگار تنها اشاره‌ای جزئی به قضایای ناتمامیت را کافی دانسته‌اند.

در سپتامبرِ ۱۹۳۰ (شهریور ۱۳۰۹) همایشی در کُنیگزْبِرگ [۳۳] برگزار می‌شود که ضمن آن به هیلبرت که تازه از کُرسیش در گُتینْگِن [۳۴] در ۲۳ ژانویه‌ی (بهمن ۱۳۰۸) همان سال بازنشسته شده است شهروندیِ کونیزبرگ اعطاء می‌شود. وی در این مناسبت فرخنده، در سخنرانی معروف و پرصلابت «منطق و شناخت طبیعت» [۳۵] پرده از عقیده‌اش برمی‌دارد که «هیچ پرسشِ بی‌پاسخی وجود ندارد» [۳۶] و آن را با این رزم‌بانگِ کوبنده که

Wir müssen wissen;
wir werden wissen.

«باید بدانیم، و خواهیم دانست»، به پایان می‌رساند. از طنز ظریف روزگار، درست یک روز قبلْ گودل در سخنرانی‌ای با حضور فُن نُویْمن و در غیاب هیلبرت [۳۷] اثبات ناتمامیت را به همراه کاربرد

[۳۳] Königsberg

[۳۴] Götingen

[۳۵] Naturekennen und Logik

[۳۶] وی چنین افزوده است که: ([M۱۳]) «به نظر من، علت اصلی این که هیچگاه پرسشی بدون پاسخ پیدا نشده است، این است که چنین پرسشی اصلاً وجود نمی‌تواند داشته باشد».

[۳۷] که احتمالاً برای سخنرانیِ فردا آماده می‌شده است.

آن در هر راژمان ریاضی مثلاً حساب پیانو یا اصول زرملو ـ فرانکل اعلام کرده است. [۳۸]

این اتفاق باید آشوبی به پا کرده باشد. از طرفی هیلبرت به پارادوکس‌ها روی مثبتی نشان داده است و مریدان وی، مانند هِربرَند با همین ذهنیت مسأله‌ی تصمیم را در برخی حالات ثابت کرده‌اند؛ و ازدیگرسو گودل نشان داده است که پیشنهاده‌ی هیلبرت محدودیت‌های جدی دارد. [۳۹] وی نشان داده است که هیچ سیستمی که کمینه‌ی شرطهای معینی را برمی‌آورد — مثلاً شرط مشخصاً خوشایندِ اینکه الگوریتمی باشد که معین کند که جمله‌ی داده‌شده‌ای جزء اصول هست یا نه — هیچ سیستمی از این نوع نمی‌تواند همه‌ی ریاضی را دربرگیرد، و اثبات‌های سازگاری چنین سیستمی تنها در سیستم‌هائی میسر است که احتمال ناسازگاریشان از سیستم اولیه بیشتر است.

با توجه به اهمیت این دستاورد برای مطالعات پایه و نیز توجه به رویکرد مشتاقانه‌ی فون‌نویمن و دیگران به ایده‌های گودل، طبیعی است از خود بپرسیم که اثر گودل بر بورباکی چه می‌تواند بوده باشد. شگفتا که جستجو برای یافتن نامی از گودل در میان انتشارات آنان حاصلی ندارد. انگار به کلّی خود را به تجاهل زده‌اند؛ مگر لحن برخی آثارشان که از کشاکشی میان آگاهیِ آزاردهنده‌ای از وجود چیزی و میلی به کتمان آن خبر می‌دهد. مَثَلشان به کسانی می‌ماند که خود را در جزیره‌ای یافته‌اند که در آن اژدهائی هست و در پاسخ، به خودباورانده‌اند که تا بر اژدها نامی ننهند وجود ندارد.

برای نمونه، آنری کارتان در اثری با عنوان «درباره‌ی مبانی منطقیِ ریاضیات» [۴۰] اصول زرملو را به‌همراه اصل انتخاب ارائه می‌کند. ولی علیرغم گفته‌اش که اصلاحات فرانکل بر اصول زرملو را در نظر دارد، اصلی‌ترین آنها یعنی اصل جایگزینی را نادیده می‌گیرد. او به درستی اشاره کرده است که سامانه‌ی زرملو به دلیل دربرنداشتنِ تعریف مناسب برای جفت مرتب و غیره، سیستم راه‌دستی نیست، ولی در عین حال ناآگاهی خود را از تمایزات مد نظر گودل با گفتن «درست» وقتی منظورش «ثابت‌شدنی» است و «نادرست» وقتی منظورش «رد شدنی» و «مشکوک» وقتی منظورش «نامعین» است، آشکار کرده است.

وی همچنین درباره‌ی تئوری‌های متناقض توضیح داده یادآوری می‌کند که تعیینِ متناقض بودن یا

[۳۸] پیش از آن گودل در این باره در فرهنگستان وین در ۲۳ اکتبر ۱۹۳۰ اطلاع داده است و رسید انتشار مقاله‌اش را در ۱۷ نوامبر ۱۹۳۰ دریافت کرده است.

[۳۹] ارزیابی‌های تازه‌ای از برنامه‌ی هیلبرت را در [M۱۱،M۱۸،M۲۰] بیابید.

[۴۰] Sur le fondement logique des mathématiques

نبودن یک تئوری به «برنامه‌ی تصمیم‌گیری» [۴۱] مربوط است، و آن عبارت است از برنامه‌ای برای یافتن روشی کُلّی که معیّن کند چه زمانی یک رابطه‌ی داده شده (یعنی یک فرمول) را می‌توان یک معادله‌ی منطقی (یعنی قضیه) در نظر گرفت. به بیان او پاسخِ این سوال تنها در حالتهای خاص دانسته است و در حالت کلی راهی برای پاسخ به آن دانسته نیست. او سپس چنین افزوده است که «این پرسشها در عین اهمیتی که دارند، در بحث ما نمی‌گنجند».

وی از پایان‌نامه‌ی هربرند نام می‌برد و از «درس‌هائی درباره‌ی اعدادِ فرامتناهی» [۴۲] از شرپنسکی، و دیدگاهی اتخاذ می‌کند که خود آن را به دیودنه نسبت داده است و می‌گوید که این ایده‌ها «remontent à 1938» یعنی به ۱۹۳۸ بازمی‌گردند (در حالی که در حقیقت در ۱۹۳۹ منتشر شده‌اند) و چنین می‌افزاید که:

> به بیان ساده، تئوری ریاضی تئوری‌ای است منطقی که با سامانه‌ای از اصول معین شود. موجودات این تئوری، فی‌نفسه با این سامانه‌ی اصول تعریف می‌شوند و این اصول به‌گونه‌ای موادی را می‌دهد که گزاره‌های درست باید بر آنها اعمال می‌شود. بخشِ ریاضی یک تئوری این چنین، تعریف این موجودات، نام‌گذاری آنها و اعمال گزاره‌ها و فرمولها بدانهاست. [۴۳]

وی از کانتور، کرونکر، زرملو، براور، پارادوکسِ اسکولم، پوانکاره و لبگ نام می‌برد ***ولی نه از گودل!***

بی‌شک برای کارتان نیز مبانی ریاضی، سوالی مطرح بوده است؛ پس چرا نباید او نامی از گودل بیاورد؟ در میان فرانسوی‌زبانهائی که توانسته‌ام با آنها مشورت کنم، روی معنی عبارتِ فرانسویِ est tout idèal در مقاله‌ی سال ۱۹۴۲ (۱۳۲۱ شمسی) از کارتان بر سر این اختلاف نظر است

[۴۱] Entscheidungsproblem

[۴۲] Leçons sur les nombres transfinis

[۴۳] une th'eorie math'ematique n'est pas autre chose qu'une th'eorie logique, determin'ee par un système d' axiomes . . . les êtres de la th'eorie sont definis ipso facto par le système d'axiomes, qui engendre en quelque sorte le materiel auquel vont pouvoir s'appliquer les propositions vraies; d'efinir ces êtres, les nommer, leur appliquer les propositions et relations, c' est en cela que consiste la partie proprement math'ematique de la thdorie logique.

که آیا قرار بوده است که خواننده‌ی این مقاله از آگاهی‌ای که کارتان می‌بایست از قضایای ناتمامیت داشته باشد و علاقه‌ی او به بحث در این باره، بداند یا خیر. متن اشاره شده در زیر آمده است:

> Le problème de décider si une proposition donnée est vraie dans une thèorie se ramène à celui-ci: une relation donnée eat-elle une identité logique? De même pour le problème de décider si une théorie est ou n'est pas contradictoire. Ces problème se ramènent donc, en dèfinitive, à l'Entscheidungsproblem, qui consiste à trouver une méthode générale permettant de décider si une relation, expliciment donnée, est ou n'est pas une identité logique. Ce problème n'est resolu que dans des cas particuliers.
>
> De sorte que, jusqu'ànouvel ordre, le partage en trois catégories dont nous venons de parler (propositions vraies, propositions fausses, propositions douteuses) est tout idéal: dans une théorie dont on saurait qu'elle n'est pas contradictoire, il y a des propositions dont on prouvé qu'elles sont vraies, d'autres dont on prouvé qu'elles sont fausses (le negations des précédentes), d'autres dont on ignore à la fois si elles sont vraies ou si elles sont fausses. Et encore, généralement, ne saura-t-on même pas prouver qu'une théorie donnée n'est pas contradictoire.

دوپهلونویسی‌های مشابهی نیز در اثر سال ۱۹۳۹ از ژان دیودنه یافت می‌شود که کارتان بدان ارجاع داده است: «روشهای نوین اصل‌بندی و مبانی ریاضیات». [۴۴] وی یافته‌های کانتور را که هیلبرت بسی کارگشا دانسته بود، «بی‌حرمتی به عقل سلیم!» [۴۵] می‌خواند. وی پاسخ به بحران مبانی

[۴۴] Les Méthode Axiomatiques Modernes et les Fondoments des Mathematique
[۴۵] resultats si choquants pour le bon sens!

ریاضی در آغاز قرن را در مکتب صورتگرایی هیلبرت می‌داند که بنا به آن درستی یک قطعه از ریاضی بسته به پیروی آن از اصول معین است و نه بسته به تعبیرِ آنها. به اظهار او،

> فلسفه‌ی ارزشمند رویکرد صورتگرا زدودن ابهاماتی است که همچنان تفکر ریاضی را تیره کرده است؛ [۴۶]

نیز او چنین می‌افزاید که

> طبیعتاً هنوز تا اثبات این که مفهوم مدّنظر هیلبرت برآورده‌شدنی است، راه زیادی مانده است. [۴۷]

دیودنه دوباره بی‌آنکه نامی از گودل بیاورد آگاهی مشکوکانه‌ی خود را از نتایجِ او با تعبیر زیر می‌رساند:

> بنا به نتایجِ یک اثر تازه، میزان تجرّدِ قوانین ریاضی‌ای که برای اثبات سازگاری ریاضیات لازمند، به اندازه‌ی میزانِ تجرد خودِ ریاضیات است، که این از ارزش و کاربرد چنین اثباتی بسیار می‌کاهد. [۴۸]

وی این آگاهی را چند سال بعد نیز، در آگهی‌ای که برای درگذشت هیلبرت نوشته است آشکار می‌کند ولی همچنان جرأت آوردن این نام هراس‌آور را به خود نمی‌دهد:

> به نظر می‌آید که شهودِ هیلبرت این یک بار او را کمی بیش از حد امیدوار کرده است. امروز دلایل خوبی برای شک به ممکن بودن چنان اثباتهائی (برای سازگاری) پیدا شده

[۴۶] le principal mérite de la méthode formaliste sera d'avior dissipé définitivement les obscurités qui pesaient encore sur la pensée mathématique.

[۴۷] Il reste naturellement à montrer que la conception de Hilbert est réalisable.

[۴۸] En outre, il semble, d'après les travaux les plus récents, que, contrairement à ce que croyait Hilbert, les règles qu'il serait nécessaire d'adopter en métamathématique, pour aboutir à une démonstration de la non-contradiction des mathématiques, seraient d'un degré d'abstraction aussi élevé que les règles mathématiques elles-mêmes, ce qui amoindrit encore la portée que pourrait avoir une telle 'démonstration'."

است. [۴۹]

در «مبانی ریاضی برای ریاضیدانان» [۵۰] [۵۱] نیکُلا بورباکی بار دیگر نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو را بعلاوه‌ی اصل انتخاب ارائه کرده چنین نتیجه می‌گیرد:

> به عقیده‌ی من همه‌ی ریاضیاتِ تابه‌امروز را بر این مبانی بنا می‌توان کرد. اگر رویکرد من نکته‌ی بدیعی داشته باشد، آن این است که به جای راضی کردن خود به چنین اظهاری، تلاش بر اثبات آن دارم به همانگونه که دیوژن [۵۲] وجودِ حرکت را ثابت کرده است. اثباتم به موازاتِ رشد رساله‌ام به تدریج دقیقتر می‌شود.

همانگونه که حدس می‌توانید زد، هیچ نامی از گودل آورده نشده و هیچ اشاره‌ای به موجودیت کار گودل نشده است. منظور، اثری است که در سال ۱۹۴۸ هفده‌سال است که زیر چاپ بوده است.

در رساله‌ی دیگر بورباکی، «معماری ریاضیات» [۵۳] بازْ نامی از گودل به میان نمی‌آید ولی این بار اشاره‌ای به برخی «پیچیدگی‌ها» شده است.

سوالهای من این است:

> **چرا بورباکی از گودل نامی به میان نیاورده است؟**

و

> **چطور بورباکی متوجه ناکافی بودن سامانه‌ی زرملو برای نظریه‌ی مجموعه‌ها به همراه اصل انتخاب برای ریاضیاتِ موجود نشده است؟**

---

[۴۹] Il semble que l’intuition de Hilbert l’ait, pour une fois, entraêné à des espoirs quelque peu exagérés, et on a actuellement de bonnes raisons de douter de la possibilité de telles ‘démonstrations’.14

[۵۰] The foundation of mathematics for working mathematician

[۵۱] ماتیاس، در پاورقی این عنوان را کراهتبار خوانده است!

[۵۲] Diogenes

[۵۳] L’architecture des mathémathiques

اهمیت این سوالها برای من از این مَنظر است که گروه بورباکی بی‌شک گروه تأثیرگذاری بوده است. قصد من نه زیر سوال بردن ارزش مثبت کتابهای آنان است و نه عظمت دستاوردهای آنان. تنها معتقدم که نگرش آنان به منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها، که به نسلهای جدید ریاضیدانان نیز منتقل شده است، پُرگزند است؛ چراکه در آن معرفت به ادراکِ طبیعت هرلحظه نو شونده‌ی ریاضیات راه داده نشده است. به جرأت می‌توانم گفت که اگر روزی بورباکی مُرده باشد، از سِتروَنی نوعِ برخورد خویشتن بوده است.

پیش از گمانه‌زنی برای پاسخ این پرسشها، کمی بیشتر درباره‌ی توضیحات بورباکیان درباره‌ی این موضوعات کاوش می‌کنیم.

در «معماری ریاضیات» بورباکی میان صورتگراییِ منطقی [۵۴] که خود با آن مخالف است، و روش اصل موضوعی، [۵۵] که مورد تأیید اوست، تمایز قائل شده‌است:

> هدف اصلی در روش اصل موضوعی، دقیقاً همان است که صورتگراییِ منطقی به تنهایی نمی‌تواند فراهم آورْد: دریاباندنِ عمیق ریاضیات. [۵۶] [۵۷]

بنابراین منظورِ وی از روش اصلی موضوعی، نه سامانه‌ی جامعی برای استنتاج ریاضی، که نظامی ذهنی است برای هَرَسِ شاخه‌ها تا کُنده و بدینسان شفاف‌سازیِ شباهتها و قابل‌انتقال‌کردن تئوری.

> نوعِ جمعیّتی که روش اصل موضوعی به ریاضیات می‌بخشد مانند زره‌ی منطق صورتگرا، جمعیت یک اسکلت بی‌روح نیست.
>
> بسیاری از ریاضیدانان در روش اصل موضوعی تنها به دنبال موشکافی‌های بیهوده‌ی منطقی‌ای هستند ناتوان از باربردن آوردن هیچ نظریه‌ای. تصور ایستا از علم، بعیدترین به روش اصل موضوعی است. خواننده نپندارد که ما مدعی یافتن وضعیت قطعی علم شده‌ایم.

[۵۴] logical formalism

[۵۵] axiomatic method

[۵۶] دریاباندن، یا دریاواندن یعنی تفهیم

[۵۷] profound intelligibility of mathematics

> چه بسا پیشرفتهای علم ریاضی در آینده، باعث افزایش تعداد ساختارهای پایه شود و نیاز به برخی از اصول تازه یا برخی ترکیبهای تازه از اصول را آشکار سازد.

آندره وِیْ نظر بورباکیان را درباره‌ی منطق به عنوان دستور زبان ریاضیات، سیاستمندانه‌تر بیان می‌کند:

> منطق شاید ضامن سلامت غذای ریاضیدان باشد، ولی منبع غذای او نیست. نان روزانه‌ی ریاضیدان پرسشهای مهم ریاضیند. [۵۸]

وی با این گفته، ناخواسته اعتقاد خود را بدین آشکار می‌کند که پرسش با اهمیتی در منطق یافت نمی‌شود. او بار دیگر بی آوردن نام گودل، نگرانیش از این را آشکار می‌کند که حرفِ آخر در منطق شاید هنوز گفته نشده باشد:

> چه بسا اخلاف ما روشهایی برای استدلال به نظریه‌ی مجموعه‌ها اضافه کنند که مورد پسند امروز ما نباشند. [۵۹]

نظر اصلی بورباکی در جمله‌ی نقل‌شده، که نیز یادآور نکات ذکر شده در بندهای پیش است، در تناقض با ادعای سرسختانه‌ی دیودنه در کتابِ «سراسرنمای ریاضی محض» [۶۰] [۶۱] است که «نظریه‌ی مجموعه‌ها از کار درآمده است».

رویکرد کلی بورباکی در بیانه‌ی این گروه به روشنی آمده است:

> اصل سازمانی ما، ارائه‌ی مفهومی است که طبق آن برای ساختارها سلسله‌مراتبی حاصل آید، از ساده به پیچیده و از کُلّی به جزئی.

[۵۸] Mais, si la logique est l'hygiène du mathématicien, ce n'est pas elle qui lui fournit sa nourriture; le pain quotidien dont il vit, ce sent les grands problèmes.

[۵۹] Il se peut sans doute qu'un jour nos successeur désirent introduire en théorie des ensembles des modes de raisonnement que nous ne nous permettons pas.

[۶۰] Panorama of Pure Mathematics

[۶۱] در این کتاب، نام شِلاخ از فهرست کسانی که در نظریه‌ی مدل نقش محوری داشته‌اند حذف شده است؛ [M۱۰] را ببینید.

> ... نظریه‌ی گروهها... نظریه‌ی مجموعه‌های مرتب (شامل مجموعه‌های خوشترتیب)... نظریه‌ی ساختارهای توپولوژیک...

در میان این اظهارات بدون‌محل‌سوال، یکی هست که اگر توضیح داده نشود، چه‌بسا گمراه‌کننده باشد:

> در نخستین رویکردهای اصل موضوعی به حساب (مانند حساب ددِکیند ــ پئانو و حساب هیلبرت ــ اقلیدس) با تئوریهای تک‌ارزشی مواجه بودیم؛ منظور تئوریهایی است که، برخلافِ نظریه‌ی گروهها، با سامانه‌ای از اصول کاملاً معین می‌شوند.

درست است که هندسه‌ی اقلیدسی در دو و سه بعد، با اصول هیلبرت کاملاً معین می‌شود: هر گزاره در هندسه‌ی مسطحه اگر در هندسه‌ی فضایی قابل اثبات باشد، در هندسه‌ی مسطحه نیز قابل اثبات است؛ ولی بنا به قضیه‌ی گودل، نه حساب پئانو، با اصول پئانو یا هر کس دیگری، این‌چنین است، و نه هندسه‌ی تصویریِ از بُعدِ دو. لازم به ذکر است که افزودن یک تک‌اصل (قضیه‌ی دِزارْگْ [۶۲]) به هندسه‌ی تصویری از بُعدِ دو، ویژگی یادشده را برای آن فراهم می‌آورد. [۶۳] شاید بورباکی با در نظر گرفتن منطقی از مرتبه‌ی دوم یا بالاتر برای مدل استانداردِ حساب، مدعیِ تک‌ارزشی بودن حساب پئانو شده است؛ این خود نیز البته جای سوال است.

برداشت من از این استخراجات این است، که بورباکی ارزش مثبت کار هیلبرت و مکتب او را دریافته و ایده‌ی تقلیل پرسش سازگاری ریاضی به مجموعه‌ای از قوانین خوشایند او بوده است. ازاین‌رو حتی با این که گودل عدم امکان تکمیل برنامه‌ی هیلبرت را نشان داده، بورباکی اصرار بدین فکر داشته است که منطق و نظریه‌ی مجموعه‌ها چیزهایی‌ند برای گنجاندن در جلد اول و سپس به فراموشی سپردن.

بورباکی در چاپهای بعدی کتابهایش تغییر موضع داده است، تا آنجا که نام گودل را می‌آورد، از نتیجه‌های مستقل می‌گوید و اصل جایگزینی را بیان می‌کند. در عین حال گرایش پیشاگودلی او، که دریافت آن مرا در این بررسی متحیر کرده بود، به جای خود باقی است. نیز همچنان چنان به نظر می‌آید که توضیحات را کسانی نوشته‌اند که فهمشان از مبانی ریاضیات به ۱۹۲۰ (۱۲۹۹ شمسی) برمی‌گردد.

---

[۶۲] Desargues

[۶۳] در این باره در [M۱] بخوانید.

اکنون وقت تکیدن به پرسش اول است:

چرا در طرز نگرش بورباکی سهم بزرگ گودل در مبانی ریاضیات نادیده گرفته شده است؟

چرا درک بورباکی از مبانی همگام با پیشرفت مبانی پیش نرفته است؟

پاسخ این سوال را باید در لایه‌های مختلفِ جامعه‌شناختی، روانشناختی و ریاضیاتی جُست. چه بسا عاملی ملی‌گرایانه هم در موضع‌گیری بورباکی دخیل بوده باشد. این را می‌توان با نظر [۶۴] الکساندر کُئَرِه [۶۵] در زیر مقایسه کرد:

> از دلایلی که باعث صد سال بی‌اعتنایی به هِگِل در فرانسه شد، می‌توان طرز نوشتن ابهام‌آمیز او، چیرگی فلسفه‌ی سنتی دکارت و کانت، و از همه مهمتر، عدم تمایل فرانسویان به باور عقیده‌ی راسخِ هگل به «یکانگی سنتز منطقی با رویداد تاریخی» اشاره کرد. برای فرانسویانِ معتقد به فلسفه‌ی عقلانی، تاریخ امری جدا از منطق و دلیل بود که جاودان و نه گنجان در چهارچوب زمانند.

به عنوان مصداقهای دیگری از تعصبات عقیدتی اینگونه (که تنها محدود به فرانسه نبودند) در فرانسه، می‌توان به یک قرن مقاومت دانشگاه پاریس در برابر ایده‌های پاراسلسوس [۶۶] [۶۷] و مقاومتِ تحت تأثیر دکارت در برابر ایده‌های لایبنیز درباره‌ی بی‌نهایت‌کوچکها [۶۸] اشاره کرد.

وانگهی، در اواخر دهه‌ی ۱۹۳۰ (۱۳۱۰ شمسی) دانشکده‌هایی در فرانسه با کار گودل آشنا و در انتشار آن فعال بودند. برای مثال، تک‌پژوهشِ «طرحهای پیدایش» [۶۹] از آلبرت لاتمان [۷۰] و نوشته‌های

[۶۴] [H۴] و [H۶] را ببینید.

[۶۵] Alexandre Koyré

[۶۶] Paracelsus

[۶۷] ایده‌هایی که لُردِ همیشه‌سبزِ داکر در گلانتون، آنها را با ذوق شخصی خود به چالشهای علمی به ثبت رسانده است:[H۱۲] را ببینید.

[۶۸] این اختلاف‌نظر چندان طول نکشید: [H۵]

[۶۹] Les schémas de genèse,

[۷۰] Albert Lautman

ژان کَوَیه تحت عنوان «پرسشهای مبانی ریاضیات» [۷۱] و «خالی بودن حساب از تناقض» [۷۲] [۷۳] نشان می‌دهند که هرگونه موضع‌گیری وطن‌پرستانه‌ی ضد گودل، شاید تنها مختص به بورباکیان بوده است.

کَوَیه، سال ۱۹۲۹ را سال گذارِ میان دو دوره در پیشرفت منطق نوین می‌پندارد: دوره‌ی ساده‌انگاری و دوره‌ی نگاه منتقدانه. به دلایل روانشناسانه، بورباکیان به برونرفت از دریافت ساده‌انگارانه‌ی منطق که با آن رشد یافته‌اند تمایلی نشان نداده‌اند. اینگونه عدم تمایل در میان ریاضیدان اروپایی چندان نادر نیست.

نوع برخورد بورباکی با منطق شاید تقلیدی از نگاه تمسخرآمیز پوانکاره به به آثار کانتور و راسل باشد. با این که پوانکاه در «آخرین مقالات» [۷۴] خود، نوعی پذیرش رقیب از خود نشان داده است، —— او سه هفته پیش از مرگ، در یک سخنرانی رقیبانش را متحدان اخلاقی خوانده و برای آنهایی که با ایده‌ها و روشهای متفاوت به دنبال آرمان مشترکند احترام متقابل قایل شده است —— ولی این تظاهر به آشتی، سخت توانسته باشد نقدهای استهزاءآمیز و طعنه‌های مخرّب و در عین حال کاملاً نارَوای قبلیش را از یادها ببرد.

وان هاینِرُت [۷۵] در مقدمه‌اش بر «نوشته‌های منطقی» [۷۶] اثر هربرندْ چاپ ۱۹۶۹ در فرانسه، با اسفبار خواندن وضع منطق در فرانسه، اذعان می‌کند که خسارت وارد به منطق از سوی پوانکاره را مرگ زودهنگام بسیاری از منطقدانان فرانسوی دوچندان کرده است: کوتورات با برخود به یک خودوری باری در بسیج عمومی سال ۱۹۱۴ کشته می‌شود، نیکُد در سال ۱۹۲۴ و در ۳۱ سالگی به علت بیماری سل می‌میرد، هربرند در ۲۳ سالگی در کوهنوردی کشته می‌شود و کویس و لاتمان به ترتیب در ۴۱ و ۳۶ سالگی به دلیل شرکت در «مقاومت آلمان» [۷۷] به دست آلمانها در سال ۱۹۴۴ کشته می‌شوند. این فقدانهای آخر بخشی از پدیده‌ی بزرگتری بودند: منطقدانان اروپایی از ترس هیلتر، مدارسی در آمریکا و اسرائیل بازگشودند که این مدارس به بار نشستند و از مدارس منطق

[۷۱] La problème du fondement des mathématiques

[۷۲] La non-contradiction de l'arithmétique

[۷۳] [M۶]،[M۱۴]

[۷۴] Last Essays

[۷۵] van Heijenoort

[۷۶] Écrits Logiques

[۷۷] Resistance

اروپایی پیش افتادند. [۷۸]

شاید سبب گمراهی بورباکی، هیلبرت بوده باشد که پذیرفتن اثر گودل برای او که به برنامه‌ی خود باور اهتمام داشته است، دشوار بوده است. اما از آنجا که هیلبرت خیلی سریعتر از شاگردانش از تحیّر به در آمده است، برای توجیه بورباکیان نیاز به جستن توضیح دیگری است: شاید تعصباتشان آنها را از دیدن اهمیت وقایعی که برایشان دانسته بوده است باز می‌داشته است.

گویا بورباکیان به سطحی از عجز روانی رسیده بوده‌اند که نتوانسته‌اند این احتمال قویِ پیشنهادشده توسط گودل را بپذیرند که: هیچ مبانی‌ای برای ریاضیات از نوعی که هیلبرت پیش نهاده است و بورباکی با آغوش باز پذیرفته است، وجود ندارد؛ هیچ راهی برای بنای ریاضیات بر اساس منطق، کلاسها یا هر چیز دیگری وجود ندارد که طی آن با ثبیت برخی ایده‌های اولیه، نیاز به هیچ فکر اضافه‌ای نباشد؛ و مشکلات مبانی را نمی‌توان به بخش یکِ «کتاب بزرگ» محدود کرد؛ آنها به سرتاسر ریاضی رسوخ کرده‌اند.

سوال دومم در بالا این بود:

چطور بورباکی متوجهِ بسنده نبودنِ نظریه‌ی مورد انتخابش برای مجموعه‌ها به عنوان مبانی ریاضیات نشده است؟

پاسخ پیشنهادی من این است که آنها تنها به حوزه‌هایی از ریاضیات پرداخته‌اند که اصول زرملو برایشان بسنده *است*؛ وصفِ این حوزه‌ها در یک کلمه، **هندسه** (در برابرِ حساب) است. [۷۹]

به نوشته‌ی لایبتنیز، استدلال معمولاً در دو پیچال معروف گم می‌شود؛ در پرسش بی‌قیدی و ضرورت، و در پرسش پیوستگی و بی‌نهایت. من دومی را به چالش طلبیده به کاوش در آنچه که به نظرم دوگانگی اساسی در ریاضیات است می‌پردازم. این دوگانگی تنشی میان دو نوع شهود مقدماتیِ

[۷۸] برای مثال، در کمبریج در چهار سال پنجاه درس مربوط به منطق ارائه می‌شود در حالی که در هاروارد و پرینستون دویست و پنجاه و در برکلی، که در آن منطق جدی گرفته می‌شود، چهارصد درس مربوط به منطق ارائه می‌شود.

[۷۹] دکتر بریکِن با ارجاع به دگرگرده‌افشانی‌های میان هندسه و حساب در آثار وِی، سِر و دیگران، به این پیشنهاد من نقد وارد می‌کند. اما او نیز متأسفانه با بورباکی همنظر است که «سوالهای مبانی در این شاخه‌های ریاضی رسوخ نکرده‌اند». نمی‌دانم چطور می‌شود کسی به یک نوع دگرگرده‌افشانی این قدر علاقه‌مند باشد ولی در برابر انواع دیگر آن این همه مقاومت به خرج دهد. برای دیدن مثالهایی از پرسشهایی در هندسه‌ی جبری که با کمک منطق پاسخ گفته شده‌اند [F۳]،[F۲] و [F۵] را ببینید.

حسابی و **هندسی** است. [۸۰] تنش یادشده را در چیستان زیر روشنتر کرده‌ام.

آیا می‌شود یک راه‌پله مارپیچ را بدون کمک گرفتن از دستان توصیف کرد؟

سوال بالا سخت است. علت سختیش شاید این است که واژه‌ها، مانند حساب، مجرّدند، ولی مارپیچها فضایی. شاید سختی این سوال، خاستگاهی کاراندامی داشته باشد: شواهد پزشکی زیادی هست [۸۱] بر این که معمولاً نیمه‌ی سمت چپ مغز مفاهیم مجرّد را پردازش می‌کند و نیمه‌ی سمت راست مفاهیم فضایی را. [۸۲]

بورباکی از مسئله‌ی وجود رابطه میان هندسه و حساب، که مسئله‌ای بسیار باستانی است و حتی اِلِئانیان نیز درباره‌ی آن بحث کرده‌اند، باخبر بوده و در «معماری ریاضیات» نوشته است:

> صرف نظر از ریاضیات کاربردی، همیشه میان مبادی هندسه و حساب (به ویژه در جنبه‌های مقدماتی آنها)، دوگانگی وجود داشته است. از همان آغاز، دومی دانشی با اندازه‌های گسسته، ولی اولی دانشی با حدود پیوسته بوده است. این دو جنبه، منجر به پیدایش دو دیدگاه شده‌اند که از زمان کشف اعداد اصم در تقابل با هم بوده‌اند. درواقع، دقیقاً همان کشف اعداد اصم تلاشهای اولیه را برای به یگانگی رساندن دانش، یا به بیان دقیق تر، فیثاغوریان را در به تحت حساب درآوردن همه‌ی علم (با این ادعا که «هرچیزی عدد است») با شکست مواجه کرده بود.

[۸۰] دکتر مَنکوسو، نظر مرا به بخش چهار کتابِ «هندسه‌گرایی دکارتی و حسابگرایی لایبنیتزی»، از بلاوال [H۱] جلب کرده که در آن از این دوگانگی برای توجیه اختلاف میان دکارت و لایبتنیز استفاده شده است.

[۸۱] منابع [P۱] و [P۲] و [P۳] را ببینید. از جان دیویس، استاد بازنشسته‌ی کمبریج به علت توجه دادن من به این تحقیقات سپاسگزارم.

[۸۲] یک منتقد صمیمیِ پیش‌نویس قبلی این مقاله چنین می‌نویسد: «بورباکی از کدام نیمه‌ی مغز استفاده می‌کرده است؟ نظر من این است که از نیمه‌ی چپ. ریاضیات نیمه‌ی‌راستی هندسه‌دانان ایتالیایی خوشایند بورباکی نبوده است: بخش بزرگی از آنها مشکوک است و اگر بتوان صحیح و غلط را مفاهیم نیمه‌چپی، و درست و نادرست را مفاهیم نیمه‌راستیِ مغزی به حساب آورد، بیشترِ آنها را می‌توان صحیح ولی نادرست دانست!

بورباکیان به جای استفاده از ابزارهای توپولوژیک و آنالیزی برای تقویت نوع استدلال ایتالیایی (لفشتز، هاج و دیگران)، راه جبری‌سازی را برگزیدند (زاریسکی، چوالی، وی، گروتندیک). به نظر می‌آید که وِیْ در برابر تمایل طبیعی خودش کار کرده است. به نظر من او همیشه آنالیزی فکر می‌کرده ولی روشهایی غیرعادی برای استدلال داشته است. برای همین است که کتاب «مبانی هندسه‌ی جبری» او این قدر عجیب و غریب به نظر می‌آید.»

یک قرن عقبتر، آگوستوس دُمرُگان چنین نوشته است:

> استدلالهای هندسی و فراروندهای حسابی هر یک جایگاه خود را دارند. آمودن ایندو در آموزش ابتدایی، به دریافت درست هر یک لطمه می‌زند.

باز ۱۳۰۰ سال عقبتر می‌رویم: در *چهارگانه‌ی بوئِتیوس*، ریاضیات به چهار حوزه‌ی حساب و هندسه، موسیقی و نجوم تقسیم شده است. از آنجا که جفت دوم نسخه‌ی کاربردی جفت اول است، این تقسیم‌بندی را می‌توان به دو حوزه در نظر گرفت. از سوی دیگر، جِی جِیْ سیلوستر در «درسهای مشروط در هندسه» [۸۳] ارائه شده در ۴ سپتامبر ۱۸۵۴ گفته است:

> سه ایده، یا به بیان بهتر، سه حوزه‌ی اصلی فکر، بر همه‌ی پیکره‌ی دانش ریاضی چیرگی دارند و هر حقیقت ریاضی به یکی از آنها یا به ترکیبی از دو تا و یا هر سه‌ی آنها بازمی‌گردد. این سه، سه نوع دریافت از **اندازه** اند: اعداد، فضاها، ترتیب.
>
> اشیای مورد استفاده در حساب، ویژگی مجرّد اعداد هستند. در جبر، که دانش عملگرها خوانده می‌شود، ترتیب، ایده‌ی غالب است. در هندسه نیز سروکارمان با فرگشتِ [۸۴] ویژگی‌ها و رابطه‌های میان فضاها یا اجرام فضایی است.
>
> غور کردن در طبیعت فضا به عنوان شیئی مستقل، یا مطالعه‌ی آن بر اساس ارتباطش با ذهن انسان، کار دانشمندان علوم ماوراءالطبیعه است. هندسه‌دانان به شغل کم‌رونقتر ولی رضایتبخشتر مطالعه‌ی فضا به عنوان یک حقیقت عینی مشغولند...
>
> اگر نه برای کشف مقاطع مخروطی، نسبت‌داده‌شده به افلاطون، قانون عمومیِ جاذبه تا به امروز استخراج نشده بود. شاید خودِ افلاطون نیز کمتر گمان می‌کرد که در حال نوشتن دستورِ زبانی است که از پس دوران صفحات گیتی را در آن خواهند نوشت.
>
> برای فهم این که هندسه چیست، باید در اعماق آن غوطه خورد و فکر و احساس کردن مانند هندسه‌دانان را آموخت.

[۸۳] A probationary lecture on geometry [M23].

[۸۴] =تکامل

تقسیم‌بندیِ سیلوستر را، نظر به این که «ترتیب»، ساختاری است نهاده بر دو مفهوم دیگر اندازه، می‌توان از سه به دو تقلیل داد؛ پرسش این است که آیا می‌شود این تعداد را به تنها یک حوزه کاست [۸۵]. گمان من این است که تفکیک فیزیولوژیکِ نحوه‌ی پردازش مجردات از اشیای فضایی توسط مغز، مؤید این نظریه باشد که این تقسیم‌بندی، کوچکترشدنی نیست.

در زیر دو شهود حسابی و هندسی را بیشتر کاویده‌ایم.

این دو نوع شهود از هم مستقل نیستند. زبان هر یک دارای غِنای کافی برای دربرگرفتن ترجمانی از دیگری است: پیکرنمایی از اعداد حقیقی را می‌توان در ظرف نظریه‌ی مجموعه‌ها تراشید: نخست با ساختن اعداد گویا و سپس (به عنوان مثال) با درنظرگرفتن شکافهای ددِکیند؛ نیز می‌توان نقاطِ با فاصله‌ی برابر در فضا را نقاط صحیح روی یک خط دانست. امّا چنین ترجمانهایی مستعد تناقضاتند؛ زیرا در آنها هِمّت بر حفظ قراردادها، و نه شهودهای پشت آنها، گماشته شده است.

برای مثال، فیثاغوریانِ معتقد به این که «هر چیزی عدد است» را ناممکن بودن محاسبه‌ی قطر یک مربع به صورت نسبتی از ضلع آن، سخت ناامید کرده بود. در اینجا، بهره‌گیری از یک ساختار ساده‌ی هندسی، منجر به تناقضی حسابی شده بود.

اِشْتیفل (۱۵۶۷–۱۴۵۸، معادل با ۸۳۷ تا ۹۴۶ شمسی) از چیستی «اَصَم‌ها» پرسیده بود. هندسه، آنها را به عنوان طول، و نه به عنوان عددْ قابل‌قبول می‌داند. به نوشته‌ی او: «عدد اصم، عدد حقیقی نیست، زیرا سایه‌ای از بی‌نهایت آن را پوشانده است». وی $\sqrt{۲}$ را باور نداشت.

[۸۵] همان منتقد صمیمانه درباره‌ی این موضوع نوشته است: «فریمن دایسون، در بخشِ سوم کتابش [F۴] درباره‌ی یگانه‌سازان و متفرق‌سازان توضیح داده است. یگانه‌سازان از وحدت و متفرق‌سازان از تنوع لذت می‌برند. من همیشه فکر می‌کرده‌ام که ریاضیدانان گرایشی طبیعی به وحدت دارند. از سوی دیگر، می‌دانم که نظریه‌ی‌مجموعه‌دانانی که به «فُرسینگ» علاقه‌مندند هیچگاه نمی‌توانند چنین باشند.

«به نظر من درباره‌ی بورباکی، تمایزی که دایسون قائل شده است بیشتر صدق می‌کند تا تمایزی که شما بدان اشاره کرده‌اید. بورباکی بیش از همه به یگانه‌سازی علاقه‌مند بوده است. بخشی از این یگانه‌سازی را می‌توان با گستراندنِ با دقتِ نظریه‌ی اندازه حاصل کرد، و بخش دیگر آن را باید با تبدیل تئوریهای آنالیزی به یک تئوریهای جبری و بدینسان افزایش گستره‌ی کاربرد آنها و فراهم آوردن امکان دریافت همزمان مفاهیم مختلف حاصل آورد. به نظر می‌رسد که جبر، اسبِ بارکشِ یگانه‌سازان باشد. بورباکی کوشیده است که محتوای ترکیبیاتی شاخه‌هایی از ریاضی را که برای بهره‌برداریِ او «رسیده» بوده است تا حدی روشن کند.»

نمی‌دانم تمایز تایسون، چه فرقی با تمایز بیان‌شده در نخستین بند این مقاله میان «خلاقیت» و «تثبیت یافته‌ها» دارد.

در راستای دیگر، تناقضِ باناخ ـ تارسکی را داریم که طبق آن، یک کُره را می‌توان به تعداد متناهی قطعه، چنان تقسیم کرد که تنها با دَوران و تغییرمکانِ فضاییِ این قطعات، دوکره‌ی هم‌اندازه‌ی کره‌ی اولیه به دست آید. دراثبات این قضیه، از ترکیب استدلالهای شرودرْ برنشتاین با اصل انتخاب استفاده شده است (و در غیاب اصل انتخاب، قضیه‌ی باناخ ـ تارسکی در حالت کلی برقرار نیست).

در اینجا استدلالهایی که در بافتار نظریه‌ی‌مجموعه‌ای طبیعی به حساب می‌آیند، به نتایجی منجر شده‌اند که با هندسه در تناقضند. این را می‌توان با استدلالهای فیبوناچی در قرن سیزده (قرن هفتم شمسی)، مقایسه کرد در یافتن معادله‌ای مکعبی با پاسخی نَه از نوع اعدادِ اصمِ اقلیدسی.

رویکرد بورباکی به هندسه، هنوز هم رایج است. به تازگی، سَوْندرس مکْ لِیْن، ریاضیدان برجسته‌ی آمریکایی، فراخوان به بازبینی استدلالهای فلسفه‌ی ریاضیات داده است و آنچه را که خود مبانی عظیم نظریه‌ی مجموعه‌ای ریاضیات خوانده، در عباراتی همانند زیر به نقد کشیده است:

> مبانی عظیم نظریه‌ی‌مجموعه‌ای، نگرشی تک‌بعدی و اشتباه به ریاضیات است. نظریه‌ی مجموعه‌ها به بخش بزرگی از وَرْزه‌ی ریاضیات به کُلّی نامربوط است. امروز، منطقگرایی، صورتگرایی و افلاطونگرایی، به کُلّی تحت سیطره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها و فرسختی [۸۶] استنتاجی درآمده است.

نظریه‌ی مجموعه‌ها آماج نقدهای دیگری نیز بوده، مانند آنچه تام [۸۷] در زیر گفته است:

> به نظر می‌آید که نظریه‌ی مجموعه‌ها، هندسه را سرکوب کرده است. [۸۸]

و از همه‌ی اینها مهمتر نتیجه‌گیری [۸۹] شیرین مقاله‌ی ۱۹۲۲ (۱۳۰۱ شمسی) از اسکولم است که

> مهمترین نتیجه در بالا، اشاره به نسبیت مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ای است. من این را در زمستان ۱۹۱۵/۱۹۱۶ در گُتینگِن شفاهاً به پروفسور بِرنِشْتاین گفته بودم. پیش

[۸۶] واژه‌ی فرسختی، معادل پیشنهادیی ملایری است برای rigor

[۸۷] Thom

[۸۸] مترجم: شاید «نهاویدن» در اینجا بهتر از سرکوب کردن باشد. نهاویدن، که در دهخدا ترساندن معنی شده است بنا به «ملایری» معادل دقیق واژه‌ی انگلیسیِ(درا صل فرانسویِ) suppress است. برای توضیح، پیوند زیر را ببینید: http://dictionary.obspm.fr/?formSearchTextfield=suppress&formSubmit=Search&showAll=

[۸۹] Schlußbemerkung

از این به دو دلیل از انتشار آنها خودداری کرده بودم: نخست این که درگیرِ مسائل دیگری بوده‌ام؛ دوم این که چنین می‌اندیشیدم که نامطلوبی نظریه‌ی مجموعه‌های اصل موضوعی برای مبانی، برای ریاضیدانان، آنقدر واضح است که عمده‌ی آنان تلکف پذیرفتن آن را به خود نخواهند داد. به تازگی، و با کمال تعجب، دریافته‌ام که بسیاری از ریاضیدانان نظریه‌ی مجموعه‌ها را مبانی مطلوبی برای ریاضیات دانسته‌اند. از این رو، وقت را برای انتشار نقدهای خود رسیده یافتم. [۹۰]

من مقصر این حمله‌ی جدید را بورباکی می‌دانم که دانش ریاضیدانان از منطق را در همان سطح ۱۹۲۹ فسیلانده است [۹۱]. مَکْ لِین، که به عنوان شاگردِ بِرْنه باید نسبت به بورباکی منطق را بهتر بشناسد، باز به موضعی یورش برده است که منطقدانان در طی شصت سال گذشته در حال کوچ از آن بوده، ولی سایر ریاضیدانان هنوز در آن مانده‌اند.

بحث درباره‌ی نقاط قوت و ضعف دیدگاههای مک‌لین درباره‌ی مبانی ریاضیات در کتابش تحت عنوان «ریاضیات: صورت و کارکرد» [۹۲] در در این مقال نمی‌گنجد. ازاین‌رو در زیر به چند تذکر بسندیده‌ایم.

برخلاف نظر اسکولم، به نظر من، برای ریاضیات هیچ مبانی نهایی‌ای وجود ندارد؛ ولی، نظریه‌ی مجموعه‌ها بخش قابل توجهی از ریاضیات را تحت پوشش قرار می‌دهد. من با نظر اول مک لین و نیز با تام موافقم و سخن آنها را مطابق با نظر خود می‌یابم که نظریه‌ی مجموعه‌ها، بیشتر مختصِ پرداخت به جنبه‌ی حسابی ریاضیات است، تا جنبه‌ی هندسی آن. نیز نظر دوم مک‌لین را تأئید می‌کنم که نظریه‌ی مجموعه‌ها به هندسه در کاربردْ مرتبط نیست ولی در معنی وسیع آن با حساب رابطه‌ی تنگاتنگ دارد.

نیز، با این که با بخش بزرگی از نقد سوم مک لین موافقم، استفاده‌ی او از عبارت «نظریه‌ی مجموعه‌ها و فرسختی استناجی» برایم جای سوال است. او ایندو را باهم‌متحد پنداشته و نسبت به این که آنها با دگرنمایی، خود را آخرین منجی ریاضیات دانسته‌اند معترض است. من ایندو را جداازهم

[۹۰] [M22]

[۹۱] داستان از این قرار است که یکی از اعضای بورباکی در در یک سخنرانی در پرینستون و در حضور گودل گفته است که در منطق از زمان ارسطو تا به حال اتفاق تازه‌ای روی نداده است. آیا خواننده می‌تواند حدس بزند که کدام؟

[۹۲] Mathematics: Form and Fucntion

می‌بینم. منطق، دانشِ نحوه‌ی استفاده از زبان است [۹۳]؛ نظریه‌ی مجموعه‌ها مطالعه‌ی خوش‌بنیادی است، و نه، برخلاف تصور مک‌لین، مطالعه‌ی فراروند شکلگیری مجموعه‌ها.

تفاوت میان زرملو و زرملو ـ فرانکل نیز همین است. زرملو ـــ یا به بیان بهتر، زیرسامانه‌ای از آن که می‌توان، به علت حمایتهای مک‌لین از آن در کتابها و مقالاتش، آن را سامانه‌ی مک‌لین خواند ـــ سامانه‌ای است که شکلگیری مجموعه‌ها را توجیه کرده برای ملاحظات هندسی نیز بسنده است. زرملو ـ فرانکل، سامانه‌ای است که، به علاوه‌ی آن، تعریفهای بازگشتی را، به بیان دیگر اضافه کردن ساختار به ناشناخته‌ها را، هم پشتیبانی می‌کند؛ و این ویژگی، که نقطه‌ی کانونی نظریه‌ی مجموعه‌های کریپکی ـ پلاتِک است، آن را برای جنبه‌ی حسابی ریاضیات مناسب کرده است.

در نظریه‌ی‌مجموعه‌های زرملو، این را که هر مجموعه‌ی خوش‌ترتیب با یک عددترتیبیِ فن‌نُیْمن ایزومرف است، نمی‌توان ثابت کرد. نیز نمی‌توان وجود اوردینالِ $\omega + \omega$ ی فن‌نیمن را اثبات کرد (هرچند وجود و خوش‌بنیادی ترتیبهای خطیِ ازآن‌نوع‌ترتیبی را می‌توان نشان داد)؛ نیز در اردینالها و رابطه‌های خوش‌بنیاد نمی‌توان از قضیه‌ی بازگشت [۹۴] استفاده کرد. بنابراین استقراء، که حکم قلب حساب را دارد، از (بخش بزرگی از) هندسه محذوف است. از طرف دیگر، حساب فاقد شهود فضایی است؛ بنابراین به هر دوی حساب و هندسه، در کنار هم، نیاز هست.

در مفهوم **هندسی**، اعداد صحیح به عنوان نقاط با فاصله‌ی برابر روی یک خط درنظرگرفته‌شده و ازاین‌رو، در این شهود همه‌ی اعداد طبیعی دارای جایگاه یکسانند؛ به عبارتِ راسل، «گونه‌ی» آنها یکسان است. در مفهوم **حسابی**، ۰ ساده‌ترین عددِ طبیعی است و اعداد طبیعی بزرگتر، از اعداد طبیعی کوچکتر تولیدشده، از این رو نسبت به آنها پیچیده‌ترند؛ پس هیچ دو نوع عدد طبیعی‌ای از «گونه‌ی» یکسان نیستند [۹۵]. تلاش برای تعبیر هر یک از این دو شهود تحت دیگری، به هر دو آسیب می‌زند؛ بهتر است فلسفه‌ای برای ریاضیات انتخاب کرد که به هر دوی آنها اجازه‌ی رشد سالم در کنار هم بدهد.

[۹۳] شاید این گفته برای بسیاری بحث‌برانگیز باشد؛ ولی این اختلاف‌نظر، دیدگاه مرا که منطق را باید از نظریه‌ی مجموعه‌ها جدا دانست، تقویت می‌کند.

[۹۴] Recursion

[۹۵] من نظر پروفسور مک‌لین را که تعریف فن‌نیمن اساساً «حیله‌گری» است نمی‌پذیرم؛ زیرا در تعریف فن نیمن از «اعداد ترتیبی»، توالی اعداد صحیح «حسابی» به نیکی درج شده است.

نظریه‌ی‌مجموعه‌هایی که مک لین در کتابش پیشنهاد کرده است [۹۶]، زیرسامانه‌ای است از زرملو به علاوه‌ی اصل انتخاب. بنابراین نقدهایی که اینجا بر رویکرد پیشاگودلی بورباکیان به ریاضیات و بر موضع‌گیری هندسی آنها شده، بر پیشنهاده‌ی او نیز رواست.

مقاله را با نقلِ قولی از ژان دیودنه که:

> هنوز رابطه‌ی میان ترکیبیات و ریاضیاتِ مفهومی دریافته نشده است،

و با پیشنهاد این که هم فلسفه‌ی پیشنهادی مک‌لین و هم دریافت مورد جستجوی دیودنه، از مطالعه‌ی مجدد رابطه‌ی متقابل میان حساب و هندسه حاصل‌شدنی است، به پایان می‌برم.

[۹۶] برای خواندن بحثی درباره‌ی وضعیت منطقی سامانه‌ی ارائه‌شده در [M۱۶] منبع [M۱۷] را ببینید.