

بارم سوال اول

$$y(3x^2 + 5\ln y)dx + x(2x^3 + 10\ln y + 5)dy = 0$$

$$\left. \begin{aligned} M &= 3yx^2 + 5y\ln y, & N &= 2x^3 + 10x\ln y + 5x \\ M_y &= 3x^2 + 5\ln y + 5, & N_x &= 6x^2 + 10\ln y + 5 \end{aligned} \right\} \text{نیز}$$

$$\frac{M_y - N_x}{-N} = \frac{-3x^2 + 5\ln y}{-y(3x^2 + 5\ln y + 5)} = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln y$$

$$N = e^{\ln y} = y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (yM) = 3y^2x^2 + 5y^2\ln y, \quad (yN) = 2x^3y + 10(xy)\ln y + 5xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (yM) \Rightarrow f(x, y) = \int (3y^2x^2 + 5y^2\ln y)dx = y^2x^3 + 5y^2x\ln y + h(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (yN) \Rightarrow \frac{2x^3y + 10(xy)\ln y + 5xy}{(yN)} = 2yx^2 + 10(yx)\ln y + 5yx = h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = \text{مقدار ثابت}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow \boxed{y^2x^3 + 5y^2x\ln y = C} \quad \text{نیز ۲}$$

- که منبع در این جواب و حل کردن اینکه معادله به ازای y و x حاصل از سطر (نیز) این

آنها $\frac{1}{y} = \ln y$ است آردند حد اکثر می‌آید

- بقیه راه حل ما نیز بررسی شدند (مثلاً بعضی اول $z = \ln y$ تغییر متغیر دارند)

به نام خدا، پاسخ سوال ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

راه حل اول: متادله برنولی است.

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{e^{rx}}{x^r}y^r \Rightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{e^{rx}}{x^r}y^r; \quad z = y^{1-r} = y^{-r} \Rightarrow z' = -ry'y^{-r-1} \Rightarrow \frac{z'}{-r} = y'y^{-r-1}$$

$y(1)=1$

$$y^{-r}y' - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y^r} = \frac{e^{rx}}{x^r} \Rightarrow \frac{z'}{-r} - \frac{z}{x} = \frac{e^{rx}}{x^r} \Rightarrow z' + \frac{r}{x}z = \frac{-re^{rx}}{x^r}$$

مرتب اول خطی:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{r}{x} dx} = e^{r \ln(x)} = x^r; \quad z'x^r + rxz = -re^{rx} \Rightarrow (zx^r)' = \int -re^{rx} dx$$

$$zx^r = -e^{rx} + c \Rightarrow z = \frac{-e^{rx} + c}{x^r} \Rightarrow \frac{1}{y^r} = \frac{-e^{rx} + c}{x^r}$$

جواب عمومی

$$y(1)=1 \Rightarrow 1 = -e^r + c \Rightarrow c = 1 + e^r \Rightarrow \frac{1}{y^r} = \frac{-e^{rx} + 1 + e^r}{x^r}$$

جواب خصوصی

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = xz' + z$$

راه حل دوم:

$$y' = \frac{1}{x}y + \frac{e^{rx}}{x^r}y^r \Rightarrow xz' + z = z + e^{rx}z^r \Rightarrow z' = e^{rx}z^r \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z^r} = e^{rx} dx \xrightarrow{\int} -\frac{1}{r-1}z^{-(r-1)} = \frac{e^{rx}}{r} + c_1 \Rightarrow z^{-(r-1)} = -e^{rx} + c \Rightarrow z = \frac{y}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-(r-1)} = -e^{rx} + c \Rightarrow \frac{1}{y^r} = \frac{-e^{rx} + c}{x^r}$$

$y(1)=1 \Rightarrow 1 = -e^r + c \Rightarrow c = 1 + e^r$

$$\frac{1}{y^r} = \frac{-e^{rx} + 1 + e^r}{x^r}$$

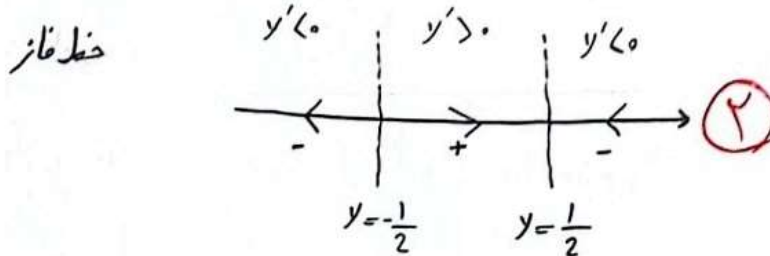
جواب خصوصی

بارم سوال ۳

-3

$$y' = 1 - 4y^2$$

نقاط مقابل $y' = f(y) = 0 \Rightarrow 1 - 4y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$ (۲)



نقطه پایدار $y = +\frac{1}{2}$

نقطه ناپایدار $y = -\frac{1}{2}$

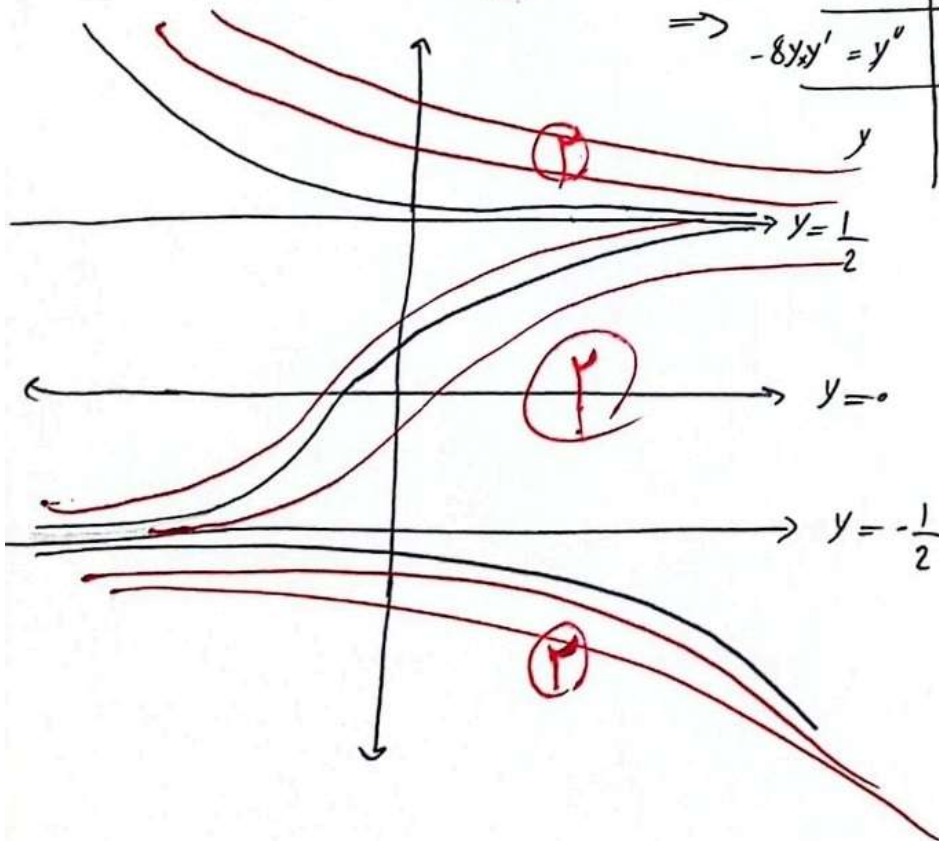
$y'' = -8yy' = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$ (۳)

 $\Rightarrow$

$$-8yy' = y''$$

	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
y'	-	+	-
$-8y$	+	0	-
$-8yy' = y''$	-	+	-
	نزولی	معدوم	معدوم
	تغیر یابی	تغیر بالا	تغیر یابی
	U	∩	U

(۳)



$$y'' - 2y' + 10y = (x-1)^2 + (e^x + e^{3x}) \sin^3 x$$

ابتدا ریشه‌های معادله مشخص نظیر معادله مشخص معادله دفرانسیل فوق را بدست می‌آوریم:

$$y'' - 2y' + 10y = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2r + 10 = 0 \quad \text{معادله مشخص}$$

ریشه‌های معادله: $r = 1 \pm 3i$

تابع $g(x)$ (تابع سمت راست معادله دفرانسیل) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) = (x-1)^2 + e^x \sin^3 x + e^{3x} \sin^3 x$$

حال جواب خاص نظیر هر یک از عبارات زیر را می‌یابیم:

$$y'' - 2y' + 10y = g_1(x) = (x-1)^2 \rightarrow y_{p1} = ?$$

$$y'' - 2y' + 10y = g_2(x) = e^x \sin^3 x \rightarrow y_{p2} = ?$$

$$y'' - 2y' + 10y = g_3(x) = e^{3x} \sin^3 x \rightarrow y_{p3} = ?$$

در معادله اول، $g_1(x)$ به فرم یک چندجمله‌ای است و عدد ۰ ریشه معادله مشخص نیست. بنابراین

$$y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$$

در معادله دوم، $g_2(x)$ به فرم $e^{\alpha x} \sin^3 \beta x$ است که در آن $\alpha = 1$ ، $\beta = 3$ ، $P_n(x) = 1$. بنابراین با توجه به اینکه $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 3i$ ریشه معادله مشخص است خارج:

$$y_{p2} = x^1 e^x [\cos^3 x \times D + \sin^3 x \times E]$$

در معادله سوم، $g_3(x)$ به فرم $e^{\alpha x} \sin^3 \beta x$ است که در آن $\alpha = 3$ ، $\beta = 3$ ، $P_n(x) = 1$. بنابراین با توجه به اینکه عدد $\alpha \pm \beta i = 3 \pm 3i$ ریشه معادله مشخص نیست بنابراین

$$y_{p3} = x^0 e^{3x} [\cos^3 x \times F + \sin^3 x \times G]$$

بنابراین جواب خاص معادله دفرانسیل به فرم زیر است:

$$y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$$

$$x^2 y'' + x y' - y = x^2, \quad x > 0$$

و y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی معادله همگن نظیر (۳)
 $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$ جواب عمومی معادله
 y_1, y_2 جواب خاص معادله غیر همگن (نوشته شده در فرمول های y_1, y_2)

معادله همگن نظیر $x^2 y'' + x y' - y = 0$

$$y = x^r \Rightarrow r(r-1) + r - 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0, \quad r = \pm 1$$

$$y_1 = x \quad y_2 = x^{-1}$$

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 1 \quad y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x} \quad (۴)$$

$$u_1' = \frac{-y_2 g(x)}{w(y_1, y_2)} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot 1}{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} x \quad (۵)$$

$$u_2' = \frac{y_1 g(x)}{w(y_1, y_2)} = \frac{x \cdot 1}{-\frac{2}{x}} = -\frac{1}{2} x^2 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{6} x^3 \quad (۶)$$

جواب عمومی معادله $y = (\frac{1}{2} x) x - \frac{1}{6} x^3 (\frac{1}{x}) + c_1 x + \frac{c_2}{x}$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^2 + c_1 x + \frac{c_2}{x} = \frac{1}{3} x^2 + c_1 x + \frac{c_2}{x}$$