

سؤال 1

$$Mdx + Ndy = 0$$

نمره ۷

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{1}{r} y^r + 2ye^{2x}, \quad N = y + e^{2x} \\ M_y = y + 2e^{2x}, \quad N_x = e^{2x}, \quad M_y - N_x = y + e^{2x} \\ \frac{M_y - N_x}{N} = 1 \rightarrow \mu = e^{\int 1 dx} = e^{2x} \end{array} \right.$$

معادله

$$(e^{2x} M) dx + (e^{2x} N) dy = 0$$

نمره ۴

جواب یکمورد معادله است

$$\psi(x, y) = C$$

$$e^{2x} M = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad e^{2x} N = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

که در آن

$$\Rightarrow \psi(x, y) = \int \left(\frac{1}{r} y^r e^{2x} + 2ye^{2x} \right) dx = \frac{1}{r} y^r e^{2x} + ye^{2x} + h(y)$$

$$e^{2x} N = \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow ye^{2x} + e^{2x} + h'(y) = ye^{2x} + e^{2x}$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \rightarrow h(y) = C \Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} y^r e^{2x} + ye^{2x} = C}$$

جواب یکمورد

$$y(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{r} + 1 = C \Rightarrow \boxed{C = \frac{r+1}{r}} \quad \text{نمره ۲}$$

- بدون محاسبه در نمره صفر
- صرفاً بیان کامل نبودن (نمره ۳)

- عیب کردن کامل بودن معادله بدون در نظر گرفتن (هیچ نمره ای ندارد)
- توضیح دادن مراحل حل (هیچ نمره ای ندارد)
- اشتباه در محاسبه در (e^y = y) (حد اکثر ۶ نمره)

- نوشتن جواب یکمورد به همراه تابع دو متغیره $\psi(x, y)$ قابل قبول نیست
- نوشتن $y = \frac{1}{r} y^r e^{2x} + ye^{2x} + C$ به عنوان جواب یکمورد قابل قبول نیست
- استفاده از روش $C = Mdx + Ndy$ (بدون تعیین فرم جواب یکمورد معادله کامل) (حد اکثر ۹ نمره)

$$y' = \frac{x+ry+\epsilon}{rx-y+r}$$

$$(1) \begin{cases} x = X+h \Rightarrow dx = dX \\ y = Y+k \Rightarrow dy = dY \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} \stackrel{(1)}{=} \frac{X+ry+(h+rk+\epsilon)}{rx-y+(rh-k+r)}$$

$$(1) \begin{cases} h+rk+\epsilon=0 \\ rh-k+r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} h=-r \\ k=-1 \end{matrix}$$

$$\frac{dy}{dx} \stackrel{(1)}{=} \frac{X+ry}{rx-y}$$

$$(1) \begin{cases} z = \frac{y}{x} \hookrightarrow y = xz \\ y' = z + xz' \end{cases}$$

$$z + xz' = \frac{X+rxz}{rx-xz} \Rightarrow z + xz' = \frac{1+rz}{r-z}$$

$$\Rightarrow xz' = \frac{1+rz}{r-z} - z \Rightarrow xz' = \frac{1+z^r}{r-z} \quad \text{or } (6)$$

$$\Rightarrow x \frac{dz}{dx} = \frac{1+z^r}{r-z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{r-z}{1+z^r} dz$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{r}{1+z^r} dz - \int \frac{z}{1+z^r} dz$$

$$\ln|x| = r \tan^{-1} z - \frac{1}{r} \ln(1+z^r)$$

$$\ln|x+r| + c = r \tan^{-1} \frac{y+r}{x+r} - \frac{1}{r} \ln\left(1 + \left(\frac{y+r}{x+r}\right)^r\right)$$

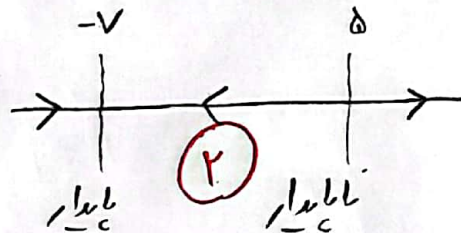
بہاؤ خدا - باستخدام سوال ۳

$$y' = y^r + ry - r\delta = 0 \Rightarrow (y + v)(y - \delta) = 0 \Rightarrow y = -v, y = \delta ;$$

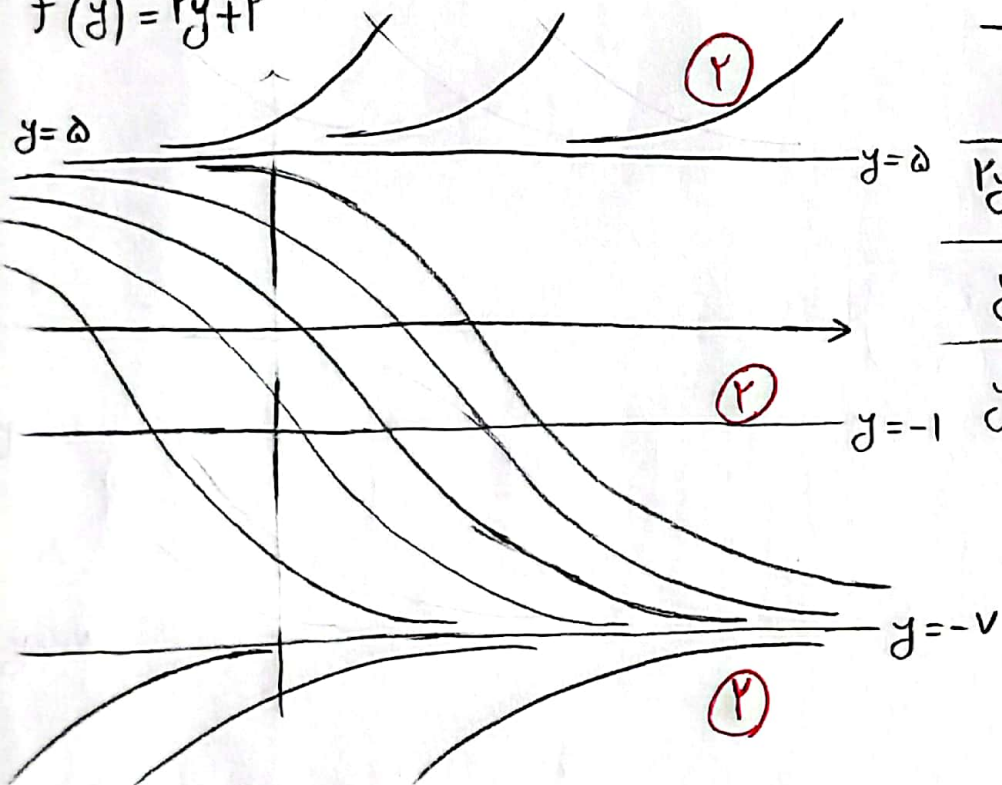
$$y' = f(y) \Rightarrow y'' = y' f'(y) = (y + v)(y - \delta)(ry + r)$$

$$f(y) = y^r + ry - r\delta ; y'' = 0 \Rightarrow y = -v, y = \delta, y = -1$$

$$f'(y) = ry + r$$



	-v	-1	delta
y'	+	-	+
ry+r	-	+	+
y''	-	+	-
y	↑∩	↓∪	↑∪



۳

$$y'' + 4y = (x-2)^2 + (e^{2x} + 2 \sin x) \cos x$$

$$y'' + 4y = (x-2)^2 + e^{2x} \cos x + \sin 2x \quad (1)$$

معادله شافض مستقیم $\Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \quad (1)$

(I) $y'' + 4y = (x-2)^2 \Rightarrow y_p = ? \quad (1)$

(II) $y'' + 4y = e^{2x} \cos x \Rightarrow y_p = ? \quad (1)$

(III) $y'' + 4y = \sin 2x \Rightarrow y_p = ? \quad (1)$

عدد 0، سیه معادله شافض مستقیم بنابر این $s=0$ ، داریم:

$$(3) \quad y_p = x^s (Ax^2 + Bx + C) \Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$$

عدد $2 \pm i$ ، معادله شافض مستقیم بنابر این $s=0$ ، داریم:

$$(3) \quad y_p = x^s e^{2x} [\cos x (D) + \sin x (E)]$$

$$y_p = e^{2x} [D \cos x + E \sin x]$$

عدد $2 \pm i$ ، معادله شافض است، بنابر این $s=1$ ، داریم:

$$(3) \quad y_p = x^s [F \cos 2x + G \sin 2x]$$

$$y_p = x [F \cos 2x + G \sin 2x]$$

بنابر این

$$y = y_1 + y_2 + y_3 \quad (1)$$

۵. جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیر همگن زیر را بیابید. (۲۰ نمره)

$$y'' - 9y' + 20y = \frac{e^{4x}}{e^{-2x} + 1}$$

حل. ابتدا دو جواب مستقل خطی معادله همگن $y'' - 9y' + 20y = 0$ را مشخص می‌کنیم:

$$y'' - 9y' + 20y = 0$$

معادله همگن: $y'' - 9y' + 20y = 0$

$$\Rightarrow r^2 - 9r + 20 = 0$$

معادله مشخص:

$$\Rightarrow (r-4)(r-5) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 5$$

ریشه‌های معادله مشخص:

$$\Rightarrow y_1 = e^{r_1 x} = e^{4x}$$

$$y_2 = e^{r_2 x} = e^{5x}$$

دو جواب مستقل خطی معادله همگن: $y_1 = e^{4x}$ و $y_2 = e^{5x}$

حال یک جواب خاص معادله غیر همگن را با روش تغییر پارامتری می‌یابیم:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x) \end{cases}$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(x)$$

فرمول‌ها

$$u_1' = \frac{-g y_2}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{g y_1}{W(y_1, y_2)}$$

نیز قابل قبول می‌باشند.

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1' e^{\gamma x} + u_\gamma' e^{\Delta x} = 0 & (I) \\ \gamma u_1' e^{\gamma x} + \Delta u_\gamma' e^{\Delta x} = \frac{e^{\gamma x}}{e^{-\gamma x} + 1} & (II) \end{cases}$$

$$(II) - \gamma(I) \Rightarrow u_\gamma' e^{\Delta x} = \frac{e^{\gamma x}}{e^{-\gamma x} + 1}$$

$$\Rightarrow u_\gamma' = \frac{e^{-\gamma x}}{e^{-\gamma x} + 1}$$

$$(I) \Rightarrow u_1' = -\frac{e^{-x}}{e^{-\gamma x} + 1}$$

$$\Rightarrow u_1 = \int \frac{-e^{-x}}{e^{-\gamma x} + 1} dx \quad \begin{matrix} e^{-x} = t \\ \Rightarrow -e^{-x} dx = dt \end{matrix} \int \frac{dt}{t^{\gamma} + 1} = \tan^{-1}(t) = \tan^{-1}(e^{-x})$$

$$u_\gamma = \int \frac{e^{-\gamma x}}{e^{-\gamma x} + 1} dx = -\frac{1}{\gamma} \int \frac{[-\gamma e^{-\gamma x}]}{e^{-\gamma x} + 1} dx = -\frac{1}{\gamma} \ln(e^{-\gamma x} + 1)$$

$$\Rightarrow y_p = e^{\gamma x} \tan^{-1}(e^{-x}) - \frac{1}{\gamma} e^{\Delta x} \ln(e^{-\gamma x} + 1)$$

$$\Rightarrow y = c_1 e^{\gamma x} + c_\gamma e^{\Delta x} + e^{\gamma x} \tan^{-1}(e^{-x}) - \frac{1}{\gamma} e^{\Delta x} \ln(e^{-\gamma x} + 1)$$

جواب عمومی