$y' = 8y - y^2 = f(y)$ ٤

$y'' = y' \frac{df}{dy} = y'(8 - 2y)$

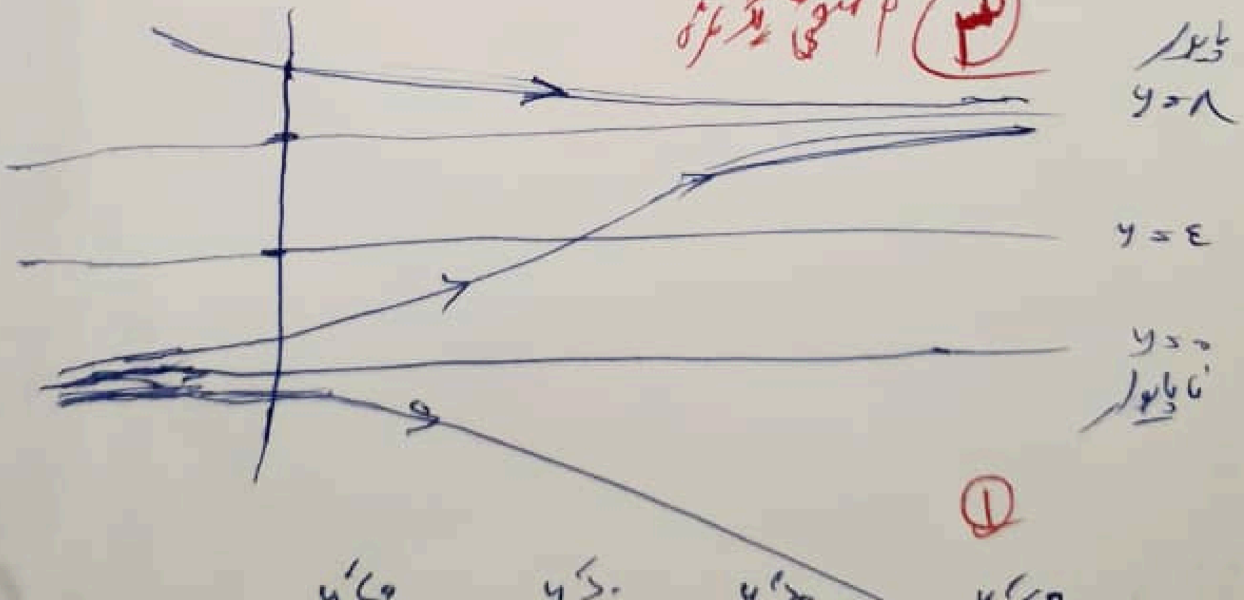
$y' = 0 \Rightarrow y = 0 \;,\; y = 8 \rightarrow$ نقاط تعادل ٢

$y'' = 0 \Rightarrow y = 0 \;,\; y = 8 \;,\; y = 4$ ٢

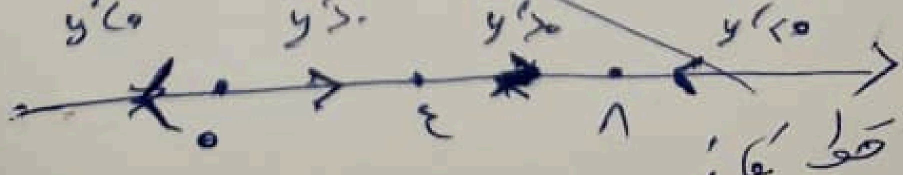
		0		4		8	
y'	−	0	+		+	0	−
$8-2y$	+		+	0	−		−
y''	−	0	+	0	−	0	+
y	↘∩		↗∪		↗∩		↘∪

٤

٣ م منحنی یک نمره



١



خط فاز

جواب سوال ۲

$$\underbrace{(e^x - y)}_{M}dx + \underbrace{(e^x - x - xy)}_{N}dy = 0$$

- معادله کامل نیست!

- بررسی وجود انتگرال ساز به فرم $\mu(y)$:

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{(-1)-(e^x-1-y)}{-(e^x-y)}$$

$$= 1$$

$$\mu(y) = e^{\int 1 dy} = \boxed{e^y}$$ ← انتگرال ساز به فرم $\mu(y)$ وجود دارد

$$\underbrace{e^y(e^x-y)}_{\bar{M}}dx + \underbrace{e^y(e^x-x-xy)}_{\bar{N}}dy = 0$$

$$d(f) = 0$$
$$\parallel$$
$$f_x dx + f_y dy$$

معادله‌ای کامل است و می‌توان آن را به فرم نوشت و با جواب عمومی $\boxed{f(x,y)=c}$

یافتن f:

$$\bar{M} = f_x = e^{x+y} - ye^y \xrightarrow{\int dx} f(x,y) = e^{x+y} - xye^y + h(y)$$

$$\Rightarrow e^{x+y} - xye^y - xe^y = \bar{N} = f_y = e^{x+y} - xye^y - xe^y + h'(y)$$

$$\Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = c$$ ثابت

$$\Rightarrow f(x,y) = e^{x+y} - xye^y + C$$

$$\boxed{e^{x+y} - xye^y = c}$$ ⇐ جواب عمومی عبارت است از:

بارم بندی سوال ۲

۱) تشخیص وجود عامل انتگرال ساز به فرم $\mu(y)$ (۲ نمره)

۲) نوشتن معادله دیفرانسیل μ و یافتن فرمول مستقیم و محاسبه μ (۴ نمره)

۳) نوشتن معادله به فرم $d(f)=0$ و یافتن f (۷ نمره)

۴) نوشتن جواب نهایی معادله به صورت $f\equiv c$. (۲ نمره)

— روش‌های دیگر و استفاده از e^x نمره‌ای ندارند

۳. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را بیابید. (۱۵ نمره)

$$(2(2x+y)+5)\,y' = 2x+y+1 \quad , \quad y(0)=1$$

حل. داریم:

$$y' = \frac{2x+y+1}{2(2x+y)+5}$$

$$z = 2x+y \Rightarrow z' = 2+y' \Rightarrow y' = z'-2$$

۴ نمره

$$\xrightarrow{\text{اعمال تغییر متغیر}} z'-2 = \frac{z+1}{2z+5}$$

$$\Longrightarrow z' = 2+\frac{z+1}{2z+5}$$

$$\Longrightarrow z' = \frac{5z+11}{2z+5}$$

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{5z+11}{2z+5}$$

$$\Longrightarrow \frac{2z+5}{5z+11}\,dz = dx$$

معادله جدا شدنی

$$\Longrightarrow \int \frac{2z+5}{5z+11}\,dz = \int dx + c$$

۵ نمره

$$\int \frac{۲z+۵}{۵z+۱۱}\,dz = \frac{۲}{۵}\int \frac{z+\frac{۵}{۲}}{z+\frac{۱۱}{۵}}\,dz$$

$$= \frac{۲}{۵}\int \frac{z+\frac{۱۱}{۵}-\frac{۱۱}{۵}+\frac{۵}{۲}}{z+\frac{۱۱}{۵}}\,dz$$

$$= \frac{۲}{۵}\int \frac{z+\frac{۱۱}{۵}+\frac{۳}{۱۰}}{z+\frac{۱۱}{۵}}\,dz$$

$$= \frac{۲}{۵}\int \left(۱+\frac{\frac{۳}{۱۰}}{z+\frac{۱۱}{۵}}\right)dz$$

$$= \frac{۲}{۵}\int dz + \frac{۳}{۲۵}\int \frac{۱}{z+\frac{۱۱}{۵}}\,dz$$

$$= \frac{۲}{۵}z + \frac{۳}{۲۵}\ln\left|z+\frac{۱۱}{۵}\right| \qquad (*)$$

۳ نمره

$$\xRightarrow{(*)} \frac{۲}{۵}z + \frac{۳}{۲۵}\ln\left|z+\frac{۱۱}{۵}\right| = x+c$$

$$\xRightarrow{z=۲x+y} \frac{۲}{۵}(۲x+y) + \frac{۳}{۲۵}\ln\left|۲x+y+\frac{۱۱}{۵}\right| = x+c$$

جواب عمومی

جواب عمومی را به فرم زیر می‌توان نوشت :

$$\frac{۲}{۵}(۲x+y) + \frac{۳}{۲۵}\ln\left|۵(۲x+y)+۱۱\right| = x+c$$

$$\xRightarrow{y(0)=1} \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{25} \ln \frac{16}{5} = c$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{5}(2x+y) + \frac{3}{25} \ln \left| 2x+y+\frac{11}{5} \right| = x + \frac{2}{5} + \frac{3}{25} \ln \frac{16}{5}$$

جواب خصوصی

۳ نمره

جواب خصوصی را به فرم زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{3}{25} \ln \left| 5(2x+y) + 11 \right| = x + \frac{2}{5} + \frac{12}{25} \ln 2$$

سؤال ۴. تشکیل کلی یک جواب خاص معادله ناهمگن زیر به کمک روش ضرایب نامعین؟

$$y''+y'-6y = xe^{2x}+(x-3)^2\cos x+2.$$

(۲ نمره) معادله همگن نظیر $y''+y'-6y=0 \Rightarrow$ معادله مشخصه $r^2+r-6=0$

(۱ نمره) $\Rightarrow (r+3)(r-2)=0 \Rightarrow$ ریشه‌های معادله مشخصه ، $r_1=-3$ ، $r_2=2$

(۱ نمره) $g(x)=xe^{2x}+(x^2-6x+4)e^{0x}\cos x+2$ تابع سمت راست معادله

(1) معادله ، $y''+y'-6y=xe^{2x}$

$\Rightarrow y_{p_1}=x^{s_1}e^{2x}(Ax+B)$ ، $s_1=$ تعداد ریشه $\alpha_1=2$ به عنوان ریشه معادله مشخصه $=1$

(۲+۲ نمره) تشخیص s_1 ، شکل کلی

$\Rightarrow y_{p_1}=x^1e^{2x}(Ax+B)=xe^{2x}(Ax+B)$

(2) معادله ، $y''+y'-6y=(x^2-6x+4)\cos x$

$\Rightarrow y_{p_2}=x^{s_2}e^{0x}[(Cx^2+Dx+E)\cos x+(Fx^2+Gx+H)\sin x]$

شکل کلی

(۲+۲ نمره) تشخیص s_2

$s_2=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha_2\pm i\beta_2=0\pm 1i$ به عنوان ریشه معادله مشخصه $=0$

$\Rightarrow y_{p_2}=x^0e^{0x}[(Cx^2+Dx+E)\cos x+(Fx^2+Gx+H)\sin x]$
$=(Cx^2+Dx+E)\cos x+(Fx^2+Gx+H)\sin x$

(3) معادله ، $y''+y'-6y=2$

شکل کلی

(۱+۱ نمره) تشخیص s_3

$\Rightarrow y_{p_3}=x^{s_3}I$ ، $s_3=$ تعداد تکرار ریشه $\alpha_3=0$ به عنوان ریشه معادله مشخصه $=0$

$\Rightarrow y_{p_3}=x^0I=I=\frac{2}{-6}=-\frac{1}{3}$

(۱ نمره) $\Rightarrow$ تشکیل کلی جواب خاص معادله اصلی ، $y_p=y_{p_1}+y_{p_2}+y_{p_3}$

$=xe^{2x}(Ax+B)$
$+(Cx^2+Dx+E)\cos x+(Fx^2+Gx+H)\sin x-\frac{1}{3}$

پاسخ سوال ۵:

$$r^{۲} - ۶r + ۹ = ۰ \implies (r-۳)^{۲} = ۰$$

$$\implies r_{۱} = r_{۲} = ۳ \implies y_{۱} = x^{۳}, \quad y_{۲} = x^{۳}\ln x \quad (\text{۴ نمره})$$

$$\implies W(y_{۱}, y_{۲})(x) = \begin{vmatrix} x^{۳} & x^{۳}\ln x \\ ۳x^{۲} & ۳x^{۲}\ln x + x^{۲} \end{vmatrix} = x^{۵}, \quad g(x) = \frac{x^{۳}}{x^{۲}} = x \quad (\text{۴ نمره})$$

$$\implies u_{۱}' = \frac{-y_{۲} \times g(x)}{W} = \frac{-x^{۴}\ln x}{x^{۵}} = -\frac{\ln x}{x}$$

$$\implies u_{۱} = -\frac{۱}{۲}\ln^{۲} x \quad (\text{۴ نمره})$$

$$\implies u_{۲}' = \frac{y_{۱} \times g(x)}{W} = \frac{x^{۴}}{x^{۵}} = \frac{۱}{x} \implies u_{۲} = \ln x \quad (\text{۴ نمره})$$

$$\implies y_p = u_{۱}y_{۱} + u_{۲}y_{۲} = (-\frac{۱}{۲}\ln^{۲} x)(x^{۳}) + (\ln x)(x^{۳}\ln x) = \frac{۱}{۲}x^{۳}\ln^{۲} x$$

$$\implies y = c_{۱}y_{۱} + c_{۲}y_{۲} + y_p = c_{۱}x^{۳} + c_{۲}x^{۳}\ln x + \frac{۱}{۲}x^{۳}\ln^{۲} x. \quad (\text{۴ نمره})$$