

سوال یک

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(x)] &= \mathcal{L}[x e^{3x} \delta(x-4) + u_{\pi}(x) \sin x] \\
 &= \mathcal{L}[x e^{3x} \delta(x-4)] + \mathcal{L}[u_{\pi}(x) \sin x] \quad (1) \\
 &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^{3x} \delta(x-4)] + \mathcal{L}[-u_{\pi}(x) \sin(x-\pi)] \\
 &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\delta(x-4)] \Big|_{s \rightarrow s-3} - \mathcal{L}[u_{\pi}(x) \sin(x-\pi)] \\
 &= -\frac{d}{ds} e^{-4s} \Big|_{s \rightarrow s-3} - e^{-\pi s} \mathcal{L}[\sin x] \quad (2) \\
 &= -\frac{d}{ds} e^{-4(s-3)} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = 4e^{-4(s-3)} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}
 \end{aligned}$$

توجه مهم ۱: در صورتی $\mathcal{L}[x e^{3x} \delta(x-4)]$ از فرم

$$\mathcal{L}[x e^{3x} \delta(x-4)] = \int_0^{\infty} x e^{3x} \cdot e^{-sx} \delta(x-4) dx = 4 e^{3 \times 4} \cdot e^{-4s} = 4 e^{12-4s}$$

و روش های معادل دیگر جای به شده است، به تناسب مغز آن داده می شود.

توجه مهم ۲: در صورتی که برای $\mathcal{L}[u_{\pi}(x) \sin x]$ بدون استدلال فقط به طور مستقیم

$$\mathcal{L}[u_{\pi}(x) \sin x] = -\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$$

خلاصه انتقال زمان، نگار برده شده است، به آن مغزهای تعلق می گیرد، مگر آن که

$$\mathcal{L}[\sin x] = \frac{1}{s^2+1}$$

یا سغ سیکال درم آرمون با این نرم

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-s}}{(s-2)(s^2-2s+2)} \right) = ?$$

حل: قول: $\mathcal{L}^{-1} (e^{-as} F(s)) = u_a(x) \mathcal{L}^{-1} (F(s)) |_{x \rightarrow x-a}$

در اینجا: $F(s) = \frac{1}{(s-2)(s^2-2s+2)}, a=1$

$$F(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-2} - \frac{s}{s^2-2s+2} \right) \quad (5)$$

$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-2} \right) = e^{2x}, s^2-2s+2 = (s-1)^2+1$

قول: $\mathcal{L}^{-1} (F(s)) = e^{bx} \mathcal{L}^{-1} (F(s+b))$ بنابر این

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{(s-1)^2+1} \right) = e^x \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s+1}{s^2+1} \right) = e^x (\cos x + \sin x)$$

(5)

جواب: 4.5:

$$(5) \frac{1}{2} u_1(x) \left[e^{2(x-1)} - e^{(x-1)} (\cos(x-1) + \sin(x-1)) \right]$$

$$y''(t) = e^t + r e^t \int_0^t \frac{y'(u)}{e^u} du$$

$$y(0) = y'(0) = 0$$

$$y'(t) = e^t + r \int_0^t e^{t-u} y'(u) du$$

$$y(t) = e^t + r [e^t * y'(t)]$$

(a)

$$L[y''] = L[e^t] + r L[e^t] L[y'(t)]$$

$$L[y'] = (1 + r L[y]) L[e^t]$$

$$s L[y] - s y'(0) - y(0) = (1 + r s L[y] - y(0)) L[e^t]$$

$$s L[y] = (1 + r s L[y]) L[e^t] \Rightarrow s L[y] = (1 + r s L[y]) \frac{1}{s-1}$$

$$\left(s - \frac{rs}{s-1} \right) L[y] = \frac{1}{s-1} \Rightarrow \left(\frac{s^2 - s - rs}{s-1} \right) L[y] = \frac{1}{s-1}$$

$$L[y] = \frac{1}{s(s+1)(s-r)} \Rightarrow y = L^{-1} \left[\frac{1}{s(s+1)(s-r)} \right]$$

$$\frac{1}{s(s+1)(s-r)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s-r} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{r} \\ B = \frac{1}{r} \\ C = \frac{1}{r} \end{cases}$$

$$y = L^{-1} \left[-\frac{1}{r s} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{r(s+1)} \right] + L^{-1} \left[\frac{1}{r(s-r)} \right]$$

$$= -\frac{1}{r} + \frac{1}{r} e^{-t} + \frac{1}{r} e^{rt}$$

(a)

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: نام درس:

گروه درس: نام استاد: تاریخ: نمره:

پاسخ سوال چهارم:

$$X' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1-t \\ 2t-1 \end{bmatrix}$$

۱) $X' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} X$ معادله همگن نظیر:

۲) $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 3, \lambda = 1$

$\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3v_1 = v_1 \\ -5v_1 + v_2 = v_2 \end{matrix} \Rightarrow v_1 = 0, v_2 \neq 0$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ۲)

$\lambda = 3$ $\begin{matrix} 3v_1 = 3v_1 \\ -5v_1 + v_2 = 3v_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = \frac{2}{5}v_2 \\ v_2 \neq 0 \end{matrix}$ $v = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ ۲)

۲) $X(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$ معادله همگن

۲) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{5}e^{3t} \\ e^t & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t \\ 2t-1 \end{bmatrix}$ ۲)

روش تغییر پارامتر:

۲) $u_2' \left(\frac{2}{5}e^{3t} \right) = 1-t \Rightarrow u_2' = -\frac{5}{2}e^{-3t} + \frac{5}{2}te^{-3t} \Rightarrow u_2 = \frac{5}{2}e^{-3t} - \frac{5}{2}te^{-3t} - \frac{5}{18}e^{-3t}$ ۲)

۲) $\int te^{-t} dt = -te^{-t} - e^{-t}$ و $\int te^{-3t} dt = -\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}$ (با استفاده از انتگرال گیری جزء جز)

۲) $e^t u_1' + e^{3t} \left(-\frac{5}{2}te^{-3t} + \frac{5}{9}e^{-3t} \right) = 2t-1 \Rightarrow u_1' = 2te^{-t} - e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{5}{2}te^{-t}$ ۲)

۲) $u_1 = \frac{11}{2}te^{-t} - \frac{11}{2}e^{-t} + \frac{11}{9}e^{-t} = \frac{11}{2}te^{-t} - \frac{11}{18}e^{-t}$ ۲)

۱) جواب عمومی معادله همگن: $c_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & -r \\ r & r & 1 \end{bmatrix} X \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r & 1 & -r \\ r & r & 1 \end{bmatrix} \quad \text{بارم سوال ۵}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ r & 1-\lambda & -r \\ r & r & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)^2 + \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2, \lambda_3 = 1 \pm ri$$

$$\lambda_1 = 1 \quad (A - \lambda_1 I) V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & -r \\ r & r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} rv_1 - rv_2 = 0 \\ rv_1 + rv_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_2 = v_1, \quad v_3 = -v_1, \quad \text{برای } r, v_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad V^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_1(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X_2(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{جواب اول}$$

$$\lambda_2 = 1 + ri \quad (A - \lambda_2 I) V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -ri & 0 & 0 \\ r & -ri & -r \\ r & r & -ri \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = 0, \quad ri v_2 = -v_3 \quad \text{و} \quad v_3 = -i v_2 \quad \text{برای } v_2$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ -i v_2 \end{pmatrix} = v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad V^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow \text{جواب فقط} \quad X(t) = e^{(1+ri)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$X_3(t) = e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad X_4(t) = e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$X_4(t) = e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$X_G = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

سوال ۶

الف) $(1-x^r)y'' - xy' + ry = 0$; $1-x^r=0 \Rightarrow x=\pm 1$ (نقاط عریضی) $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$ عاری (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{-x}{1-x^r} = \frac{1}{r}$, $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{-x}{1-x^r} = \frac{1}{r}$ (۱), $\{-1, +1\}$ (۱) غیر عاری منظم (۱)

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^r \frac{r}{1-x^r} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^r \frac{x}{1-x^r} = 0$

$x \rightarrow 1$

ب) $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$, $y(0)=1 \Rightarrow a_0=1$ (۱), $y'(0)=r \Rightarrow a_1=r$ (۱)

$(1-x^r) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ (۳)

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} r a_n x^n = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+1) a_{n+r} x^n$; $r a_r + r a_0 = 0 \Rightarrow a_r = -r$ (۲), $r a_r + r a_1 = 0 \Rightarrow a_r = -r$ (۲), $a_{n+r} = \frac{n(n-1) + n - r}{(n+1)(n+r)} a_n$; $n \geq r \Rightarrow a_r = 0$, $a_5 = \frac{5}{r_0} a_r = \frac{1}{r} \times (-r) = -\frac{r}{r}$

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots = 1 + r x - r x^2 - r x^3 - \frac{r}{r} x^5 + \dots$ (۱)

چنانچه از روش فروبیرس $r=0$ بدست آورده باشند و به رابطه بازگشتی مد نظر رسیده باشند معرکه کامل کسب می کنند.
اگر در حین محاسبه رابطه بازگشتی با ضرایب اشتباه خبری داشته باشند معرکه کمی کسر شده است.