

۱. جواب مسأله مقدار اولیه زیر را تعیین کنید.

$$y'' + 100y = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ 0 & t \geq 4 \end{cases}, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

حل. تابع سمت راست معادله را $f(t)$ بنامیم؛ در این صورت

$$f(t) = 1 (u_0(t) - u_4(t)) + 0 u_4(t) = 1 - u_4(t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[u_4(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

با تبدیل لاپلاس از طرفین معادله بدست می آید:

$$\mathcal{L}[y''] + 100 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\Rightarrow s^2 \mathcal{L}[y] - s y(0) - y'(0) + 100 \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\Rightarrow (s^2 + 100) \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[y] = \frac{\mathcal{L}[f(t)]}{s^2 + 100} = \frac{1}{s(s^2 + 100)} - \frac{e^{-4s}}{s(s^2 + 100)}$$

$$\Rightarrow y = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2 + 100)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-4s} \frac{1}{s(s^2 + 100)}\right]$$

$$\frac{1}{s(s^r+100)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^r+100}$$

$$\Rightarrow \overset{\times s(s^r+100)}{1} = A(s^r+100) + (Bs+C)s$$

$$s=0 : 1 = 100A \Rightarrow A = \frac{1}{100}$$

$$s=10i : 1 = (10Bi+C)10i$$

$$\Rightarrow 1 = -100B + 10Ci$$

$$\Rightarrow -100B = 1, 10C = 0$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{100}, C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s(s^r+100)} = \frac{1}{100} \frac{1}{s} - \frac{1}{100} \frac{s}{s^r+100}$$

یا به روش دیگر

$$\frac{1}{s(s^r+100)} = \frac{1}{100} \frac{(s^r+100)-s^r}{s(s^r+100)}$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{s^r+100}{s(s^r+100)} - \frac{s^r}{s(s^r+100)} \right)$$

$$= \frac{1}{100} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^r+100} \right)$$

٥٤٥

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s^2 + 100)} \right] = \frac{1}{100} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{1}{100} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 100} \right]$$

$$= \frac{1}{100} \cdot 1 - \frac{1}{100} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 10^2} \right]$$

$$= \frac{1}{100} - \frac{1}{100} \cos 10t$$

٥٤٥

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \left[e^{-4s} \frac{1}{s(s^2 + 100)} \right] = u_4(t) \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{100} \cos 10(t-4) \right)$$

قضية (٢) انتقال

$$\Rightarrow y = \frac{1}{100} \left(1 - \cos 10t - u_4(t) + u_4(t) \cos 10(t-4) \right)$$

جواب سؤال

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\bar{e}^{-\Delta s} \ln\left(1 - \frac{r}{s^r}\right)\right] = ? \quad \text{با روش جدایی}$$

$$F(s) = \bar{e}^{-\Delta s} \ln\left(1 - \frac{r}{s^r}\right) = u_{\Delta}(t) \mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1 - \frac{r}{s^r}\right)\right]_{t \rightarrow t-\Delta}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(1 - \frac{r}{s^r}\right)\right] = g(t) \Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = \ln\left(\frac{s^r - r}{s^r}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[tg(t)] = -\frac{d}{ds}\left(\ln\left(\frac{s^r - r}{s^r}\right)\right) = \frac{-r}{s(s^r - r)} = \frac{-\frac{1}{r}}{s(s^r - r)}$$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{1}{r}}{s(s-r)(s+r)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-r} + \frac{C}{s+r} = \frac{r}{s} - \frac{1}{s-r} - \frac{1}{s+r}$$

$$\Rightarrow tg(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{r}{s} - \frac{1}{s-r} - \frac{1}{s+r}\right] = r - e^{-rt} - e^{-rt}$$

$$\Rightarrow g(t) = \frac{r - e^{-rt} - e^{-rt}}{t}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[\bar{e}^{-\Delta s} \ln\left(1 - \frac{r}{s^r}\right)\right] = u_{\Delta}(t) \left(\frac{r - e^{-r(t-\Delta)} - e^{-r(t-\Delta)}}{t-\Delta} \right)$$

سوال ۳- $y(0)=0 \quad y'(x)+y(x)+2\int_0^x (x-t)y'(t)dt = \delta(x)$

حل ۵

$$\begin{aligned} 12 \quad & \begin{cases} L(y'(x)) = sL(y) - y(0) = sL(y) \\ \int_0^x (x-t)y'(t)dt = x * y'(x), \quad L(\delta(x)) = 1 \end{cases} \\ & \text{از طریق لاپلاس بگیریم} \\ & sL(y) + L(y) + 2\left(\frac{1}{s^2}\right)(sL(y)) = 1 \\ & (s+1+\frac{2}{s})L(y) = 1 \rightarrow L(y) = \frac{s}{s^2+s+2} \\ 8 \quad & \frac{s}{s^2+s+2} = \frac{s}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \xrightarrow{s \rightarrow s-\frac{1}{2}} = \frac{s-\frac{1}{2}}{s^2+\frac{3}{4}} = \frac{s}{s^2+\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+\frac{3}{4}} \\ & y(x) = L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+s+2}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} L^{-1}\left(\frac{s-\frac{1}{2}}{s^2+\frac{3}{4}}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Sh}\frac{\sqrt{3}}{2}x \right] \end{aligned}$$

- اگر فقط فرمول $L(y)$ را بدست نوشته، حد اکثر ۵
- اگر نوشته اند $L(x) = \frac{1}{s^2}$ رقیب درست است حد اکثر ۱۰ چون صفت نه ضعیف بود
- $L(y) = \frac{1}{s^2}$ حد اکثر ۱۳
- فقط در قسمت اول $L(\delta(x))$ را اشتباه نوشته اند ۱۲
- اشتباه در فرمول لاپلاس خوب هیچی حد اکثر ۱۸ (چون این سوال است و مربوط به
- تجزیه به اعداد مسئله در تجزیه کرد در قسمت دوم حد اکثر ۱۶-۱۴-۱۲ (از ۲۰
- اشتباهات عددی در مورد ۱- ۲- ۳- ۴- ۵- ۶- ۷- ۸- ۹- ۱۰- ۱۱- ۱۲- ۱۳- ۱۴- ۱۵- ۱۶- ۱۷- ۱۸- ۱۹- ۲۰

$$X' = \begin{bmatrix} r & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} X \quad A - rI = \begin{bmatrix} r-r & -1 \\ 1 & \varepsilon-r \end{bmatrix}$$

$$\det(A - rI) = (r-r)(\varepsilon-r) + 1 = r^2 - \varepsilon r + 1 = (r-r_1)(r-r_2) = 0$$

(2) $r_1 = r$
 $r_2 = \varepsilon$

$$(A - rI)V = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -v_2 \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_1 \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)}(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - rI)^2 V = 0 \quad \text{و} \quad (A - rI)V \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

بحال $v_1, v_2 \neq 0$

$$V^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)}(t) = e^{rt} \left[I + t(A - rI) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)}(t) = e^{rt} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{rt} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)}(t) = e^{rt} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

$$X_H(t) = c_1 e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{rt} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

$$X_p(t) = \psi(t) U(t)$$

$$\psi(t) U'(t) = g(t) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1-t \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-t & 1 \\ t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

$$u_1' = \frac{1}{t} \Rightarrow u_1 = \ln t \Rightarrow X_p(t) = \frac{1}{t} X^{(1)} + \ln t X^{(2)}$$

پاسخ و نام نهی سوال 5.

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} X.$$

ماتریس ضرایب را A بنویس، یعنی $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

ضریبها، صفحه A می‌بست از،
 $P_A(r) = \det(A - rI) = \det \begin{pmatrix} -2-r & -1 & 0 \\ 1 & -2-r & 0 \\ 0 & 0 & 5-r \end{pmatrix} = (-2-r)[(-2-r)(5-r) - 0]$

$$-(-1)[1(5-r) - 0] + 0 = -(r-5)[(r+2)^2 + 1] = (r-5)(r^2 + 4r + 5).$$

$$\rightarrow A \text{ مایکروتره، } P_A(r) = -(r-5)(r^2 + 4r + 5) = 0$$

$$\Rightarrow r^2 + 4r + 5 = 0 \text{ یا } r-5 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm 2i, r_3 = 5$$

مغزه ۳ (بازای هر مقدار درجه ۱ مغزه ۱)

بردارهای ویژه، تقسیم بر مقدار درجه ۱، تقسیم بر مقدار درجه ۱،
 فرض آن $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$

$$(A - r_1 I)v = 0 \Rightarrow (A - (-2+2i)I)v = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 7-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -ia - b + 0 = 0 \\ a - ib + 0 = 0 \\ 0 + 0 + (7-i)c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ib \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ib \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

$b \neq 0$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ مغزه ۳}$$

$$\Rightarrow e^{r_1 t} v = e^{(-2+2i)t} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t} \cdot e^{2it} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t} (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin t + i \cos t \\ \cos t + i \sin t \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + i e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(1)}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$X^{(2)}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

مغزه ۱

بردار $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$ ، فرض آن که $r_3 = 5$ ، بردار ویژه $v^{(3)}$ باشد، که

$$(A - r_3 I) v^{(3)} = 0 \Rightarrow (A - 5I) v^{(3)} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7a - b + 0 = 0 \\ a - 7b + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b = 0 \\ c \text{ دلخواه} \end{cases} \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad c \neq 0.$$

$$c=1 \Rightarrow v^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

غره ۲

$$\Rightarrow x^{(3)}(t) = e^{r_3 t} v^{(3)} = e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{غره ۳}$$

$$\Rightarrow \text{حجاب عمومی } x_h(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) + c_3 x^{(3)}(t) \\ = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

غره ۱

نقطه ۱: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ در $r_1 = -2 + 2i$ باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۲: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۳: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۴: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۵: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۶: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۷: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۸: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۹: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

نقطه ۱۰: اگر بردار $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ غلط باشد، غره ۱، بردار ویژه $v^{(1)}$ باشد، که

سوال ۲

$$fx''y' - vx'y' + (x+y)y = 0 \Rightarrow y'' - \frac{v}{fn} y' + \frac{(x+y)}{fn^2} y = 0 \Rightarrow xp(x) = -\frac{v}{f} \Rightarrow p_0 = -\frac{v}{f}, p_n = 0, n \neq 0$$

$$n^2 q(x) = \frac{x+y}{f} \Rightarrow q_0 = \frac{v}{f}, q_1 = \frac{1}{f}, q_n = 0, n > 1$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) - \frac{v}{f} r + \frac{v}{f} = r^2 - \frac{11}{f} r + \frac{v}{f} = 0 \Rightarrow r_1 = r, r_2 = \frac{v}{f}$$

$$F(n+r) a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} [p_{n-k}(k+r) + q_{n-k}] a_k \Rightarrow r_1 = r \Rightarrow F(n+r) a_n = -\frac{1}{f} a_{n-1} \Rightarrow n(n+\frac{v}{f}) a_n = -\frac{1}{f} a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-1}}{fn(n+\frac{v}{f})} = \frac{-a_{n-1}}{n(fn+\frac{v}{f})} \Rightarrow a_1 = \frac{-a_0}{q}, a_2 = \frac{-a_1}{r_2} = \frac{a_0}{q \times r_2}, a_3 = \frac{-a_2}{\delta_1} = \frac{-a_0}{q \times r_2 \times \delta_1}$$

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = a_0 \left(x^r - \frac{1}{q} x^{r+1} + \frac{1}{q \times r_2} x^{r+2} - \frac{1}{q \times r_2 \times \delta_1} x^{r+3} + \dots \right)$$

$$(14) 1 = \delta$$

$$r_2 = \frac{v}{f} \Rightarrow n(n-\frac{v}{f}) a_n = -\frac{1}{f} a_{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{n(fn-\frac{v}{f})} \Rightarrow a_1 = \frac{-a_0}{-1} = a_0, a_2 = \frac{-a_1}{\delta} = \frac{-a_0}{\delta}, a_3 = \frac{-a_2}{r_1} = \frac{a_0}{r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\frac{v}{f}} = a_0 \left(x^{\frac{v}{f}} + x^{\frac{v}{f}+1} - \frac{1}{\delta} x^{\frac{v}{f}+2} + \frac{1}{\delta \times r_1} x^{\frac{v}{f}+3} + \dots \right)$$

$$(15) 1 = \delta$$

با توجه به صورت سوال اگر یکی از جواب ها را در انتهایان بدست آورده باشند کافی است و بارم بندی هم به همین خواست .
 برخی از دانشجویان فرم $\sum a_n x^{n+r}$ را در محادله قرار داده اند و به جواب رسیده اند (از فرمول ها استفاده نکرده اند) به آنها نیز
 نمره تعلق گرفته است و اگر دانشجویی در لیجای اشتباه محاسباتی داشته ولی در ادامه مسیر درست رفته است ، فقط همان جا
 نمره کاسته شده است .