شباهت سوالهای امتحان میان‌ترم با جزوه.

سوال اول امتحان:

سوال ۱. ماکزیمم‌ها و مینیمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$ را بر بازه $[1, e^2]$ بدست آورید.

جزوه: صفحه ۷۴:

۲. اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ تعیین کنید.

۳. اکسترمم‌های مطلق دو تابع $f(x) = x^x$ و $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ را در بازهٔ $[\frac{1}{3}, 3]$ به دست آورید.

۴. به ازای چه مقادیری از c معادله $\ln x = cx^2$ دقیقاً یک جواب دارد؟

سوال دوم امتحان:

سوال ۲. با استفاده از تعریف دقیق حد توابع (یعنی با استفاده تعریف (ε, δ)) ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x}{x^2+1}=\frac{5}{2}.$$

۱

جزوه:

صفحه ۱۸

۷.۱ چند تمرین با پاسخ.

تمرین. نشان دهید که $\lim_{x\to -1}\frac{2x}{x^2+1}=-1$.

نشان می‌دهیم

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\quad\left(0<|x-(-1)|<\delta\ \Rightarrow\ |\frac{2x}{x^2+1}-(-1)|<\epsilon\right)$$

برای $\epsilon>0$، با توجه به اینکه

$$|\frac{2x}{x^2+1}+1|=|\frac{2x+x^2+1}{x^2+1}|=\frac{|x+1|^2}{1+x^2}\le|x+1|^2$$

برای داشتن $|\frac{2x}{x^2+1}+1|<\epsilon$ کافی است $\delta>0$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $|x+1|^2<\epsilon$. برای این منظور کافی است $\delta\le\sqrt{\epsilon}$ انتخاب شود.

$\sin x$

سوال سوم امتحان:

سوال ۳. حاصل حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+5}\right)^{\frac{x}{2}}$$

جزوه: صفحه ۶۰

۷.۳ تمرین

۱. مقدار a را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=e.$$

سوال چهارم امتحان

سوال ۴. نشان دهید که

$$|b-a| \leq \left|\sin^{-1}(b) - \sin^{-1}(a)\right|$$

برای هر $a, b \in [-1, 1]$.

جزوه: صفحه ۶۹

در نتیجه f بر هر یک از بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ تابع ثابت است. یعنی ثوابت C_1 و C_2 وجود دارند که

$$\forall x \in (-\infty, 0) \quad f(x) = C_1 \qquad \text{و} \qquad \forall x \in (0, \infty) \quad f(x) = C_2$$

به این ترتیب با انتخاب $x = -1$، خواهیم داشت $-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = C_1 = f(-1)$. به همین ترتیب $C_2 = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

مثال. برای $a, b \in \mathbb{R}$ با شرط $0 < a < b$ نشان دهید $\frac{b-a}{1+b^2} \leq \tan^{-1} b - \tan^{-1} a \leq \frac{b-a}{1+a^2}$.

همانطور که اشاره کردیم، تابع $\tan^{-1}$ بر $\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس این تابع بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر است. بنابر قضیه مقدار میانگین، عدد $c \in (a, b)$ وجود دارد که

$$\frac{\tan^{-1} b - \tan^{-1} a}{b-a} = (\tan^{-1})'(c) = \frac{1}{1+c^2} \tag{۱.۴}$$

سوال پنجم امتحان:

برای هر $a, b \in [-1, 1]$.

سوال ۵. تابع $f(x) = \tan^{-1}(x) + x + 1$ را در نظر بگیرید.

۱. نشان دهید که تابع f بر $\mathbb{R}$ وارون پذیر است.

۲. نشان دهید که تابع $f^{-1}(x)$ بر $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است و $(f^{-1})'(1)$ را محاسبه کنید.

جزوه: صفحه ۴۸

مثال. نشان دهید تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = 2x + \cos x$ بر $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر بوده، تابع وارون تابعی مشتق‌پذیر است. مطلوب است تعیین $(f^{-1})'(1)$.

بنابر آنچه در ابتدای این بخش اشاره کردیم، برای اثبات وارون‌پذیری f باید نشان دهیم این تابع بر دامنه تعریف خود یک به

یک است. برای این منظور، مشتق f را مورد توجه قرار می‌دهیم.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 2 - \sin x$$