

نظریهٔ مجموعه‌ها

مدرس: محسن خانی

نگارنده: علی جعفری

دانشگاه صنعتی اصفهان

پاییز ۱۴۰۴

همین در کلاس زیر، ب هر بار انداز
بیشتر زانده شود کلاس سر کار انداز

نظریه مجموعه ها

جلسه اول

دکتر خانی

ضد علامت زیر را در نظر بگیرید:

① $\in$

② $x, y, z, \dots$

③ $=, (,), \exists, \forall, \leftrightarrow, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg$

تعریف (جبهه، مین، جبهه در نظریه مجموعه ها)

① $x=y$ و $x \in y$

② اگر φ یک جبهه باشد $\neg \varphi$ نیز یک جبهه است.

③ اگر φ و ψ یک جبهه باشند آنگاه $(\varphi \wedge \psi)$ و $(\varphi \vee \psi)$ ، $(\varphi \rightarrow \psi)$ ، $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ نیز یک جبهه اند.

هر آنچه که گفته شد، جمله بود؛

قصه نبود!

قواعدی وجود دارد که منجر به ایجاد

جملات جدید از جملات قبلی می‌شود.

به این قواعد، قواعد استنتاج^۱ می‌گویند.

مثلاً:

$$\text{MP} \frac{\varphi \quad (\varphi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

$$\frac{(\varphi \wedge \psi)}{\psi}$$

$$\text{IE} \frac{(\varphi \rightarrow \psi)}{(\exists x \varphi \rightarrow \psi)}$$

$$\frac{\varphi \quad \varphi}{(\varphi \wedge \psi)}$$

تقریب جمله φ یک قصه است هرگاه
با استفاده از قواعد استنتاج

در پایین یک دنباله متاهی از جملات
تکرار بگیرد.

$$\varphi, (\varphi \rightarrow \psi), \psi, ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi), \chi$$

هر چیزی که مثل χ در پایین این دنباله
تکرار بگیرد قصه است.

نظریه مجموعه‌ها

چند جمله در جملات ادل گفته خواهد شد:

به این جملات اصول نظریه مجموعه^۱ می‌گویند.

هر جمله که با شروع از این جملات خاص

در رعایت قوانین استنتاج نوشته شود،

یک قصه در نظریه مجموعه‌هاست.

ZFC

① اصل کتس^۱

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \leftrightarrow x = y)$$

* هدف: مجموعه‌ها از روی اعضایشان
شناخته می‌شوند.

تقریب می‌نویسیم $x \subseteq y$ هرگاه

$$\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$$

تقریب یک ندی خله نویسی است.

اصل کتس به زبان دیگر:

$$\forall x \forall y ((x \subseteq y \wedge y \subseteq x) \leftrightarrow x = y)$$

② اصل زوج سازی

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t = x \vee t = y))$$

به نوعی ما می خواهیم

این را بنویسیم $\{x, y\}$ و z

توی مجموعه z در بالا را با

$\{x, y\}$ نشان می دهیم.

ملاحظه

اگر a مجموعه باشد $\{a, a\}$ مجموعه است

بنابر اصل گسترش $\{a, a\} = \{a\}$

پس به نوعی اجازه می دهیم به چیزی

شماره به $\{a\}$ مجموعه که عضوی بنویسیم

و به $\{a, b\}$ مجموعه در عضوی د

این آخر.

اصل تصریح

$$\forall x \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \in x \wedge \varphi(t)))$$

ما نمی توانیم $\forall \varphi$ قبل آن بنویسیم

چرا که جز قوانین ما نیست در برابر هر φ

می توانیم این اصل را بنویسیم. پس در واقع

این یک اصل است. (دکتر)، اصل هست.

بنابراین به آن (دکتر) اصل، بنویسید.

تعریف فرض کنید φ یک جمله باشد

به $\{x \mid \varphi(x)\}$ یک کلاس گفته می شود.

اصل تصریح را می شود اینچنین نوشت:

$$C = \{y \mid \varphi(y)\}$$

x مجموعه

این اصل بیان می کند استراریت کلاس

با یک مجموعه x یک مجموعه است.

$C \cap x$ یک مجموعه است.

③ اصل تصریح

اگر φ یک جمله باشد

و x یک مجموعه باشد آنگاه

$$\{y \in x \mid \varphi(y)\}$$

یک مجموعه است.

یعنی وجود دارد مجموعه ای که این است

تعریف

فرض کنید x و y مجموعه باشند

آنگاه $\{t \in x \mid t \in y\}$ یک مجموعه است
و به آن پرسم $x \cap y$

(4) اصل اجتماع

به بیان نادین:

اگر x یک مجموعه باشد

اجتماع مجموعه‌های موجود

در x یک مجموعه است.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \wedge z \in t))$$

تعریف مجموعه y در x را با U_x

شان می‌دهیم.

این اصل به طور خلاصه می‌گوید:

$$\forall x \exists y \quad y = U_x$$

مشاهده

فرض کنید x و y در مجموعه باشند

در این صورت بنا به اصل زوج سازی

$t = \{x, y\}$ یک مجموعه است.

بنا به اصل اجتماع

$$\exists z \quad z = U t$$

این مجموعه z را با $x \cup y$ شان
می‌دهیم.

(5) اگر x یک مجموعه باشد

یک مجموعه وجود دارد که

دقیقاً از زیرمجموعه‌های x

تشکیل شده است.

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

تعریف مجموعه y را در اصل

موضوعه قبلی با $P(x)$

شان می‌دهیم.

جلسه دوم نظریه مجموعه ها

سوال آیا کلاس هست

که مجموعه نباشد؟

پاسخ کلاس زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha = \{x \mid x \notin x\}$$

ادعا کلاس α مجموعه نیستند

اثبات ادعا اگر کلاس α مجموعه باشد

در این صورت یا $a \in \alpha$ یا $a \notin \alpha$

اگر $a \in \alpha$ آنگاه $a \notin \alpha$

اگر $a \notin \alpha$ آنگاه $a \in \alpha$

بنابراین فرض مجموعه بودن کلاس α

با ما به تناقض رساند پس α

مجموعه نیست.

(6) اصل وجود

$$\exists x \quad x = x$$

تقرین مجموعه ای وجود دارد که

هیچ عضوی ندارد.

اثبات فرض کنید x یکی از مجموعه های

اسماره شده در اصل وجود باشد.

اثبات کنیم که

$$\forall x \quad \neg(x \in x)$$

می شود برانتهر نداشت

تقرین $\emptyset$ مجموعه ای است که عضوی ندارد.

تقرین $0 = \emptyset$

بنابراین اصل زوج سازی $\{0, 0\} = \{0\}$

یک مجموعه است.

تقرین $\{0\} = 1$

بنابراین اصل زوج سازی $\{0, 1\}$ نیز

یک مجموعه است.

تقرین $\{0, 1\} = 2$

$0 \in 1, 1 \in 2$

ترتیب این اعداد عنبرستان است!

سوال چرا 3 یک مجموعه است؟

$$3 = \{0, 1\} \cup \{2\}$$

$$3 = 2 \cup \{2\}$$

به طور مشابه

$$4 = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$4 = 3 \cup \{3\}$$

$$n+1 = n \cup \{n\}$$

تعریف فرض کنید a و b مجموعه باشند

تعریف کنید:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

قضیه

$$\forall a, b, c, d \quad ((a, b) = (c, d) \leftrightarrow (a=c) \wedge (b=d))$$

تعریف فرض کنید x و y در مجموعه باشند

قرار دهید

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

تمرین نشان دهید $X \times Y$ یک مجموعه است.

(7) اصل وجود مجموعه ناشناهی

$$\exists x (0 \in x \wedge (\forall t \ t \in x \rightarrow t \cup \{t\} \in x))$$

تعریف

به هر مجموعه x که دیگر رکن نشده

در اصل قبل را دارا باشد یک

مجموعه استقراری (inductive) گفته می شود.

اصل بنی می گوید:

$\exists x$ استقراری است.

قضیه

(1) یک مجموعه وجود دارد که استقراری تمام

مجموعه های استقراری است

(2) مجموعه یاد شده زیرمجموعه همه مجموعه ها

استقراری است

تعریف

$$\mathbb{N} = \bigcap x$$

x استقراری است

تجربه N یک مجموعه است. (استراده شده)

اثبات واضح است که مجموعه‌های استرایی یک مجموعه است.

$$N = \{t \mid \forall x (x \text{ استرایی} \rightarrow t \in x)\}$$

اما چرا مجموعه است؟

فرض کنید که ما یک مجموعه استرایی

باشیم. (بنابر اصل وجود مجموعه)

نامتناهی چنین مجموعه‌ای وجود دارد

واضح است که

$$N = \{t \in u \mid \forall x (x \text{ استرایی} \rightarrow t \in x)\}$$

تجربه

این N استرایی است

یعنی اگر u استرایی باشد

$$N \subseteq u$$

نتیجه در هر جهان نظری مجموعه‌ها،

یک مجموعه اعداد طبیعی وجود دارد.

در ذهن افراد و در خود ریاضی

جهان‌های نظری مجموعه‌های زیادی

وجود دارد اما مثلاً الان نتیم

هر جور تصور کنی چیزی مثل N در

جهان ما هست.

تجربه (استرایی)

فرض کنید A زیر مجموعه N باشد

و $0 \in A$ و برابر هر $x \in A$

$$A = N \quad x \cup \{x\} \in A$$

اثبات

هر مجموعه A طبق تعریف فوق

یک مجموعه استرایی است. پس

$$N \subseteq A \quad \text{از آنجایی که } A \subseteq N \text{ را}$$

طبق فرض داریم $A = N$

تجربه

$$N = \bigcup_{n \in N} n = \bigcup N$$

تعریف مجموعه X را ترایی (معدی)

$$U X \subseteq X \text{ می‌نامیم هرگاه}$$

(یعنی اگر a عضو یکی از اعضای

$$X \text{ باشد آنگاه } a \in X)$$

تجربه قبل در دامع بیان می‌کند که

N ترایی است (بخشی از تجربه)

اثبات قویه (اینده نرای است)

قرار دهید:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \forall y (y \in x \rightarrow y \in \mathbb{N})\}$$

ادعا $A = \mathbb{N}$

برای اثبات ادعا کافیست نشان دهیم

A یک مجموعه استرایی است.

(به انتهای مقدم دیت) $0 \in A$

بقیه اثبات به عنوان تمرین است.

تا اینجا نشان دادیم

$$\bigcup \mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$$

حال فرض کنید $n \in \mathbb{N}$

$$n \in \underbrace{n \cup \{n\}}_{\in \mathbb{N}}$$

پس $n \in \bigcup \mathbb{N}$

حال ثابت شد:

$$\mathbb{N} = \bigcup \mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n$$

قویه

هر $n \in \mathbb{N}$ نرای است.

تمرین

نشان دهید مجموعه استرایی است:

$$A = \{u \in \mathbb{N} \mid u \text{ نرای است}\}$$

اگر نشان دهیم A استرایی است

آنگاه $A = \mathbb{N}$ آنگاه نشان دادیم

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ ، n نرای است.

جلسه سوم نظریه مجموعه ها

قضیه

هر زیر مجموعه ناتمام از $\mathbb{N}$ دارای مینی موم است.

لم

هر عنصر $a \in \mathbb{N}$ دارای دیری زیر است:

هر زیر مجموعه ناتمام از a دارای مینی موم است.

اثبات لم

$$A = \{ x \in \mathbb{N} \mid \text{هر زیر مجموعه ناتمام از } A \text{ دارای مینی موم است} \}$$

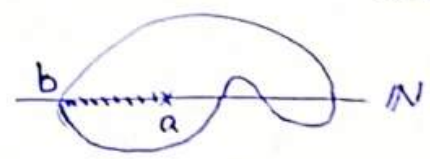
تمرین نشان دهید مجموعه استرا است.

بنا به تمرین $A = \mathbb{N}$

اثبات قضیه

فرض کنید $B \subseteq \mathbb{N}$ یک مجموعه ناتمام باشد

فرض کنید $a \in B$



واضح است که $a \cap B \subseteq a$

پس $a \cap B$ دارای مینی موم است (به نام b)

ادعا $b = \min B$

اگر $c \in B$ و $c < b$

در این صورت $c \in a$ یعنی $c \in a \cap B$ پس c کمتر از a است که a مینی موم است، $\forall c \in B$ کمتر از a اردینال ها

یادآوری 1 اگر A و B در مجموعه باشند:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A, b \in B \}$$

یک مجموعه است.

2 اگر c یک مجموعه باشد،

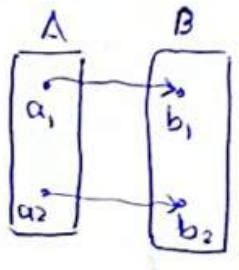
$p(c)$ ، مجموعه توانی c ، مجموعه است.

تعریف

فرض کنید A و B در مجموعه باشند

به هر زیر مجموعه از مجموعه $A \times B$

یک رابطه از A به B می گویم.



تعریف

فرض کنید $A \subseteq A \times A$

یک رابطه از A به A باشد

می گوئیم $<$ یک رابطه ترتیبی (جزئی)

است هرگاه:

$$\forall x \in A \quad \neg x < x$$

$$\forall x, y, z \in A \quad (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$$

تعریف (ادامه)

می گوئیم $<$ یک رابطه ترتیبی خطی است

هرگاه:

$$\forall x, y \in A \quad (x < y \vee y < x \vee y = x)$$

ادامه تعریف

می گوئیم $<$ یک رابطه ترتیبی خوش ترتیب است

هرگاه:

اولاً ترتیب خطی باشد و هر زیر مجموعه

ناخالی از A با این ترتیب دارای مینوم باشد.



$$A - \{a\}$$

حال خودش

گویی مجموعه خوش ترتیب

زیر مجموعه A

$\Rightarrow$ اعضایش یکی پس از

است و مینوم دارد

دیگری می آیند.

لیم فرض کنید $(W, <)$

یک مجموعه خوش ترتیب باشد

فرض کنید $f: W \rightarrow W$

یک تابع ^{الیه} f باشد (یعنی

اگر $x < y$ آنگاه $f(x) < f(y)$)

در این صورت برابر هر $x \in W$

$$x \leq f(x)$$

اثبات فرض کنید عناصری مانند t

وجود داشته باشند به طوری که $f(t) < t$

یعنی مجموعه A در زیر ناخالی باشد:

$$A = \{t \mid f(t) < t\}$$

در این صورت A دارای عنصر مینیوم است.

(مانند t)

$$t = \min A$$

داریم:

$$f(t) < t$$

$$f(f(t)) < f(t)$$

بنابراین $f(t) \in A$ و $f(t) < t$ (تناقض)

حکم ثابت می شود.

تعریف فرض کنید $(W, <_W)$

و $(W, <_{W_2})$ دو مجموعه

مرتب خطی باشند. تابع

$$f: W_1 \rightarrow W_2$$

را یک ایندومورفیسم می نامیم

عمرگاه:

① $x < y$ در W_1 باشد

② ابتدا صعودی باشد

$$(x < y \rightarrow f(x) < f(y))$$

$$x < y$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$f(x) < f(y)$$

قضیه فرض کنید $(W, <_W)$

یک مجموعه خوش ترتیب باشد

و $f: W \rightarrow W$ یک ایندومورفیسم باشد

در این صورت $f = id$ همان

اثبات $x \in W$ را $x > f(x)$

نات $f(x) > x$ (قضیه را

برای تابع وارث f بنویسیم)

بنابراین $f(x) = x$

نتیجه

فرض کنید $(W_1, <_{W_1})$ و $(W_2, <_{W_2})$

دو مجموعه خوش ترتیب باشند و

$$f_1, f_2: W_1 \rightarrow W_2$$

هم دو ایندومورفیسم باشند در این صورت

$$\forall x \quad f_1(x) = f_2(x)$$

اثبات تمرین

با راهنمایی زیر:

$$W_1 \xrightarrow{f_1} W_2 \xrightarrow{f_2^{-1}} W_1$$

تعریف فرض کنید $(W, <_W)$ خوش ترتیب باشد

و $x \in W$ به مجموعه

$$W(x) = \{t \in W \mid t < x\}$$

یک بخش آغازین از W گفته می شود.

نتیجه W با هیچ بخش آغازین خود

ایندومورف نیست.

$$\text{----- } W$$

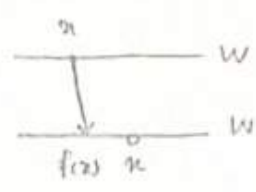
$$\text{----- } x$$

$$\text{----- } x$$

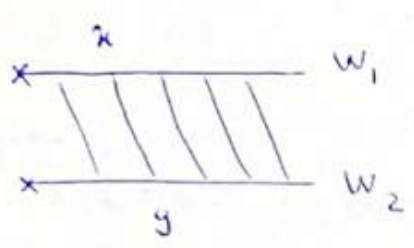
$$W(x)$$

اثبات

فرض کنید $W \subseteq W(x)$
 در این صورت به تناقض می‌رسیم.
 در این حالت $x < f(x)$ می‌شود که این تناقض است.



اثبات



قرار دهید:

$$f = \{(x, y) \mid x \in W_1, y \in W_2, W_1(x) \subseteq W_2(y)\}$$

چون $f(x) > x$ و

$$f(x) \notin W(x)$$

فرضیه

فرض کنید W_1 و W_2 در مجموعه خوش‌ترتیب باشند.

در این صورت یکی از اشتغالات زیر رخ می‌دهد:

(1) W_1 با یک بخش آغازین از W_2 اینزدرسرف است

(2) W_2 با یک بخش آغازین از W_1 اینزدرسرف است

(3) W_1 با W_2 اینزدرسرف است.

سوال اول آیا f ناتمامی است؟

بله. عناصر مبنی موم W_1 و W_2 را در نظر بگیرید.

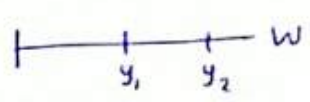
سوال دوم آیا f دیرمی تابع بودن را داراست؟

فرض کنید $(x_1, y_1) \in f$ و $(x_1, y_2) \in f$
 در این صورت:

$$W_1(x_1) \subseteq W_2(y_1)$$

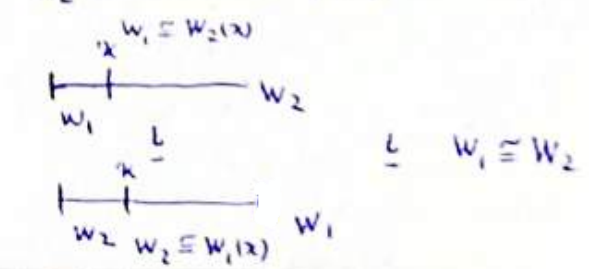
$$W_1(x_1) \subseteq W_2(y_2)$$

$$W_2(y_1) \subseteq W_2(y_2)$$



این امر امکان پذیر نیست. (اگر $y_1 < y_2$)
 آنگاه $W_2(y_1)$ یک بخش آغازین از $W_2(y_2)$ است و نمی‌تواند با آن اینزدرسرف باشد.

فرض کنیم داریم:



تمرین

شان دهم $w(x)$ فرض ترتیب است

ادامه اثبات

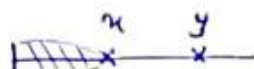
سوال سوم آیا f دیرری را بودن

را داراست؟ بلی. دقیقاً با استدلال قبلی

اگر $\text{Dom } f = W_1$ و $\text{Range } f = W_2$

آنگاه حالت سوم رخ می دهد.

فرض کنید $\text{Dom } f \neq W_1$

w_1 

w_2 

فرض کنید x کوچکترین عنصری است که در

دامنه w_1 قرار نمی گیرد (بقی های آن

همه در دامنه هستند)

ادعا $\text{Dom } f = W_1(x)$

نظریهٔ مجموعه‌ها

جلسهٔ چهارم

اثبات (از جلسهٔ قبل)

قرار دهید:

اردیال

$$f = \{ (x, y) \mid x \in W_1, y \in W_2, w_1(x) \equiv w_2(x) \}$$

دیرهای f :

تابع بودن، ۱- بودن و الیاد مهری بود

$$\text{Dom } f = W_1 \quad \text{حالت سهم رخ داده است.} \\ \text{Range } f = W_2$$

فرض کنید $\text{Dom } f \neq W_1$

فرض کنید $x \in W_1$ کوچکترین عنصری باشد که در دامنهٔ f قرار ندارد.

ادعا $\text{Dom } f = w_1(x)$ (عزیز: توضیح کنید)

ادعای دوم $\text{Range } f = W_2$

اثبات (برهان خلف) فرض کنید y اولین عنصری

باشد که در برد f قرار ندارد.

در این مهرت $w_1(x) \equiv w_2(y)$ و این

متناقض با فرض $x \notin \text{Dom } f$

به نوعی ما می‌تویم x را هم به y

ببرد و ایند صمیم را بزرگترین.

اینجوری $(x, y) \in f$ که این یعنی $x \in \text{Dom } f$ و متناقض داریم.

نادیق:

ε اردیال یک مجموعه است که با رابطهٔ (مطلوب) خوش‌ترتیب است.

تعریف (اردیال)

مجموعهٔ α را یک اردیال می‌نامیم هرگاه:

① α ترایی باشد

② α با رابطهٔ ε خوش‌ترتیب باشد

لم فرض کنید α اردیال باشد و $\beta \in \alpha$

در این مهرت β هم اردیال است.

سوال چرا β ترایی است؟

اگر $x \in \beta$ و $y \in \beta$ آنگاه $x \varepsilon y$

فرضیه

فرض کنید α و β در اردینال باشند.

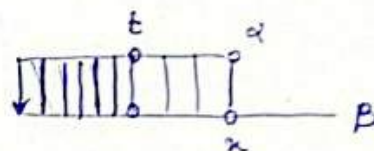
در این صورت $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$ یا $\alpha = \beta$

اثبات می‌دانیم α و β خوش‌ترتیب

هستند. فرض کنید α بزرگتر نباشد.

از β ایندوم باشد.

ادعا $\alpha \in \beta$ ادعا f همانی است



فرض کنید t اولین عنصری باشد که

$$f(t) \neq t$$

فرض کنید $f(t) = u$

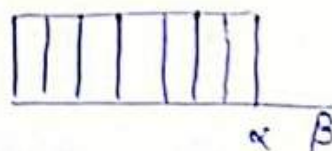
در این صورت به تناقض می‌رسیم زیرا

همه اعضای t هستند

چون $u = t$. بنابراین f همانی است.*

شک داریم که α بزرگتر نباشد

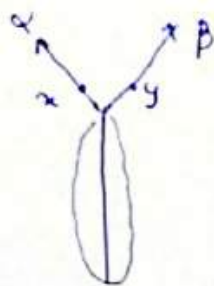
β تحت تناقض همانی ایندوم است



بنابراین $\alpha \in \beta$

فرض کنید

α و β در اردینال باشند



$$\alpha \cap \beta$$

اولین جایی که یکی نیستند را در نظر بگیرید

چیزهایی که در α هستند در β

هم هستند بنابراین $\alpha = \beta$

در نتیجه غیر ممکن است در ساز شود.

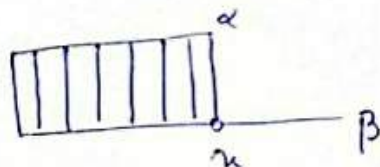
پس اتحاد اردینال‌ها هست سرهم قرار می‌گیرند

فرض کنید α و β در اردینال باشند

ادعا $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$ یا $\alpha = \beta$

فرض کنید α بزرگتر نباشد از β

ایندوم باشد



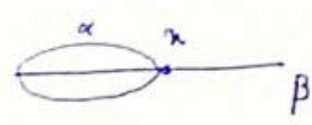
ادعا ایندوم مد نظر می‌باشد (ثابت کردیم)

* تناقض f تناقض ترتیب است بنابراین $f(t) = t$

ادامه

تا اینجا ثابت شد که:

عناصر α در β هستند



عناصر α در β هستند

بعد عناصر α چیزی به نام

α در β وجود دارد که عناصر

α در آن است که آن خود

α است. پس $\alpha \in \beta$

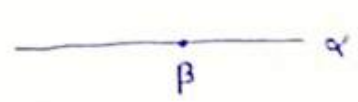
تقریب

فرض کنید α یک ارنال است.

در این صورت $\alpha \notin \alpha$

راهی فرض $\beta \subseteq \alpha$ در این صورت

β یک بخش آغازین α است.



$$\beta = \{ \alpha \mid \alpha \in \beta \}$$

اثبات

اگر $\alpha \in \alpha$ آنگاه مجموعه خوشترتیب α

باید یک بخش آغازین خود ایزدمرت می شود.

این تناقض است بنابراین $\alpha \notin \alpha$

تعریف

کلاس همه ارنال ها را با Ord نشان می دهیم.

$$\text{Ord} = \{ \alpha \mid \alpha \text{ خصوصیت ارنال بودن را دارد} \}$$

تقریب

Ord همه دیرترهای ارنال بودن را داراست.

اثبات

① فرض کنید $\beta \in \text{Ord}$ و $\alpha \in \beta$ آنگاه

$\alpha \in \text{Ord}$ (اعضای ارنال ها، ارنال اند)

② مرتب خطی بودن

③ خوشترتیب بودن

فرض کنید $A \subseteq \text{Ord}$ نهی باشد

ادعا A برای مینیمال است

فرض کنید $\alpha \in A$ خوشترتیب است (هر زیرمجموعه نهی min دارد)

در این صورت $A \cap \alpha \subseteq \alpha$ و $A \cap \alpha$ نهی

مینیمم است. فرض کنید t مینیمم $A \cap \alpha$ باشد

ادعا می کنیم t مینیمم A است.

اگر $u \in A$ و $u \neq t$ در این صورت $u \in A \cap \alpha$

و $u \in t$ و این مینیمم بودن t را نقض می کند.

لیم فرم می‌کنند α یک اردینال قالی باشد^۱
 و β عنصر ماکسیمم α باشد^۲،
 در این صورت $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

اثبات

از α ، β را برداریم عناصر β همانند
 بنابراین $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$

تعریف اردینال α را حدی (limit) می‌نامیم
 هرگاه عنصر دتالی نباشد^۱.

لیم فرم می‌کنند α حدی باشد. در این صورت

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

(اجتماع در نظریه مجموعه‌ها به نوعی حد است)

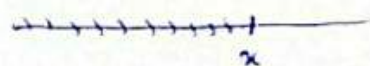
تعریف Ord مجموعه نیست.

اثبات اگر Ord مجموعه باشد^۲

آنگاه Ord اردینال است در این صورت
 $Ord \in Ord$ اما این یک تناقض است
 زیرا هیچ اردینالی متعلق به خودش نیست.

نکته هر بخش آغازین از Ord یک
 اردینال است.

اثبات



اعضای $Ord(x)$ هم اردینال اند
 بنابراین x هم اردینال می‌شود^۱
 و $Ord(x)$ که $x = Ord(x)$ هم اردینال است.

تعریف اردینال α را یک اردینال قالی می‌نامیم
 هرگاه دارای ماکسیمم باشد^۲.

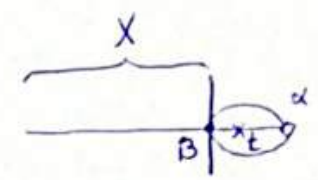
تقریب مجموعه ها جلسه پنجم

تعریف

اگر α را حدی بی نامیم
هرگاه α نامی نباشد.

مشاهده

فرض کنید α یک اعدادی حدی باشد
در این صورت $\beta \in \alpha$ و $\beta \cup \{ \beta \} \in \alpha$



کوچکترین عضو مجموعه $\alpha - X$

چیت؟ فرض کنید $t = \min \alpha - X$

در این صورت $t = \beta \cup \{ \beta \}$

مشاهده

فرض کنید α یک اعدادی حدی باشد.
در این صورت:

$$\left(\alpha + \lim_{\beta \in \alpha} \beta \right) \alpha = \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

اثبات اولاً $\bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \alpha$ (زیرا α

محدود است)

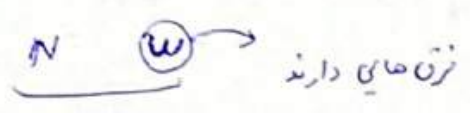
ثانیاً فرض کنید $\kappa \in \alpha$ در این صورت

$$\kappa \in \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \text{ و } \kappa \in \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \cup \{ \kappa \} \in \alpha$$

بنابراین $\kappa \in \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \cup \{ \kappa \}$ ثابت می شود:

$$\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

سوال آیا اعدادی حدی وجود دارد؟



نرخ های دارند
اما وقتی حرف از ماهیت اعدادی $\aleph$ می زنیم،
به آن w می گوئیم

اصل وجود مجموعه استرایی $\Leftarrow$ کوچکترین
اعدادی حدی وجود دارد.

اگر این اصل نبود امکان داشت که

$$w = ord$$

(چرا؟)

تمرین

نشان دهید که موارد زیر با هم متاداند:

- ① یک اعدادی حدی وجود دارد
- ② یک مجموعه استرایی وجود دارد.

$0, 1, 2, \dots, w, w+1, w+2, \dots$

$w, w+1, w+2, \dots$

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} w+n$$

با این کار شهودمان را از اعداد طبیعی گسترش دادیم.

فرضیه

فرض کنید X یک مجموعه متناهی از
برخی اعداد باشد. در این صورت
 UX یک اعداد است.

اثبات

اولاً UX یک مجموعه است.

x متعلق بودن:

فرض کنید $y \in UX$, $t \in y$.

وجود $\alpha \in X$ که $y \in \alpha$ بنا به
اعداد

تندی α , $t \in \alpha$ در نتیجه $t \in UX$

x خوش ترتیب بودن واضح است

زیرا $UX \subseteq \alpha$

که خوش ترتیب است.

بیان بهتر:

اگر X یک مجموعه از اعداد باشد،

در این صورت $\lim_{\sup X}$ اعداد است.

⑧ اصل موضوعه جانشینی (replacement)

فرض کنید $\varphi(x, y)$ یک فرمول باشد که یک تابع F

از V به V تقریباً کند

$$V = \{x \mid x = x\}$$

(برای هر x نقطه y باشد که $\varphi(x, y)$)

$$F = \{(x, y) \mid \varphi(x, y)\} \subseteq V^2$$

املاً F یک تابع

تابعی است.

functional

حال فرض کنید A یک مجموعه باشد.

تکرار دهید:

$$F[A] = \{F(t) \mid t \in A\}$$

[اصل جانشینی را بگویید] در این صورت $F[A]$

مجموعه است.

اثبات

بازگشت فرامتناهی در باره $\aleph$ می نویسد:

فرض کنید $A \neq \text{Ord}$

$\Downarrow$

$G: V \rightarrow V$

به طوری که

$f(\alpha), G(f|_\alpha)$

فرض کنید α کوچکترین عنصر در $\text{Ord} - A$

باشد. ادلا α نمی تواند منتهی باشد چون

$0 \in A$

آیا α می تواند یک اوردینال نامی باشد؟

② $\alpha, \beta+1$ ؟ خیر زیرا $\beta \in A$ و بنا بر فرض

$\alpha, \beta+1 \in A$

آیا α می تواند عددی باشد؟ ③ خیر، بنا بر

بنابر این به تناقض خود رسیدیم و ثابت می شود

$A = \text{Ord}$

قضیه بازگشت فرامتناهی (transfinite recursion)

فرض کنید $G: V \rightarrow V$ یک تابع کلاسی باشد

در این صورت می توان یک تابع یکتا

$F: \text{Ord} \rightarrow V$

ساخت به نحوی که برای هر $\alpha \in \text{Ord}$

$F(\alpha), G(F|_\alpha)$

$\downarrow$

$F|_\alpha, \{F(x) \mid x \in \alpha\}$

به صورت زیر: $F|_\alpha = \{(x, F(x)) \mid x \in \alpha\}$

قضیه

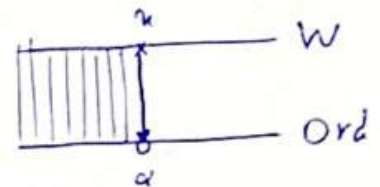
هر مجموعه خوشترتیبی با یک اردینال اینزده است.

اثبات

فرض کنید $(W, <)$ یک مجموعه خوشترتیب باشد.

از $(W, <)$ به Ord خواهیم یک تابع تعریف کنیم.

$$F = \{ (x, y) \mid x \in W, y \in Ord, W(x) \leq y \}$$



سوال دامنه F چیست؟

ادعا دامنه F $W = F$

فرض کنید x اولین عنصری باشد که در

دامنه F نیست. می توان x را به اول

اردینال بعد از x برد تابع برد.

بنابراین به امل جانشانی $F[W]$ یک مجموعه است

که یک بخش ابتدایی از Ord است و نمی تواند

کل Ord باشد چرا که Ord مجموعه نیست.

پس $F[W]$ یک اردینال است.

تمرین

فرض کنید $(W, <)$ یک مجموعه خوشترتیب باشد. نشان دهید که می تواند در W یک دنباله نزولی به صورت زیر داشت:

$$(*) \quad a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$

(صورت دقیق تر:)

هیچ تابع $F: W \rightarrow Ord$ پیدا نمی شود که نزولی باشد.

(*) به این خاصیت خوشبنیادی گویند و در واقع با این قضیه می توانیم اردینال ها خوشبنیاد هستند.

تمهید (استرای فراغتاهی)

فرض کنید $A \subseteq Ord$ و

$$0 \in A \quad (1)$$

$$(2) \quad \text{اگر } \alpha \in A \text{ آنگاه } \alpha + 1 \in A$$

$$(3) \quad \text{اگر } \alpha \text{ حدی باشد}$$

$$\forall \beta \in \alpha \quad \beta \in A$$

نتیجه شود که $\alpha \in A$

در این صورت $A = Ord$

نظریه مجموعه ها

جلسه ششم

بازگشت فراستانی ← ساخت توابع بازگشتی

فرض کنید $G: V \rightarrow V$ یک تابع طاسی باشد

در این صورت یک تابع کلاسی می‌تواند

$F: Ord \rightarrow V$ وجود دارد به طوری که

$$\forall \alpha \in Ord \quad F(\alpha) = G(F|_{\alpha})$$

بازگشت برای اعداد طبیعی

$$\exists f: \mathbb{N} \rightarrow V$$

$$f(n) = G(f|_n)$$

$$(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3))$$

$$, \dots, (n, f(n)), \dots$$

اثبات تمثیل

ادعا برای هر اوردینال α یک تابع می‌تواند

$$F_{\alpha}: \alpha \rightarrow V$$

وجود دارد به طوری که برای هر $\beta \in \alpha$

$$F(\beta) = G(F|_{\beta})$$

اثبات ادعا (استرا)

فرض کنید حکم برای اوردینال α درست باشد.

بنابراین یک تابع $F_{\alpha}: \alpha \rightarrow V$ وجود داشته باشد

$$F(\beta) = G(F|_{\beta})$$

هدف تعریف یک تابع $F_{\alpha+1}: \alpha+1 \rightarrow V$

$$F_{\alpha+1} = F_{\alpha} \cup \{(\alpha, G(F|_{\alpha}))\}$$

- فرض کنید α یک اوردینال حدی باشد و حکم برای

هر $\beta \in \alpha$ ثابت شده باشد. پس برای هر $\beta \in \alpha$

یک تابع F_{β} داریم.

هدف پیدا کردن یک تابع $F_{\alpha}: \alpha \rightarrow V$

$$F_{\alpha} = \bigcup_{\beta \in \alpha} F_{\beta}$$

$$F = \bigcup_{\alpha \in Ord} F_{\alpha}$$

F تابعی از Ord به V است و سر

خواسته شده را برآورده می‌کند (چون

که چرا تابع است و چرا می‌توانست)

اردیال‌ها

(بازگشت)

جمع اردیال‌ها با استرا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$

$$\alpha + \delta = \bigcup_{\beta \in \delta} (\alpha + \beta) \quad \delta \text{ حدی}$$

در واقع:

$$\alpha + \bigcup_{\beta \in \delta} \beta = \bigcup_{\beta \in \delta} (\alpha + \beta)$$

* اردیال‌ها بر اساس مؤلفه دوم تعریف می‌شود.

فرم اردیال‌ها

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$

$$\alpha \cdot \delta = \bigcup_{\beta \in \delta} \alpha \cdot \beta \quad \delta \text{ حدی}$$

توان اردیال‌ها

$$\alpha^0 = 1$$

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \cdot \alpha$$

$$\alpha^\delta = \bigcup_{\beta \in \delta} \alpha^\beta \quad \delta \text{ حدی}$$

مثال‌ها ← مجموعه اعداد زوج

$$2 \cdot \omega = \bigcup_{n \in \omega} 2 \cdot n = \omega$$

$$\omega \cdot 2 = \omega \cdot (1+1) = \omega + \omega$$

$$2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$$

ن

$$\alpha + (\beta + \delta) = (\alpha + \beta) + \delta$$

اثبات (استرا روی δ)

$$\delta = 0 \quad \alpha + (\beta + 0) = \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + 0$$

اگر برای δ برقرار باشد برای $\delta+1$ برقرار است:

$$\alpha + (\beta + (\delta + 1)) \stackrel{?}{=} (\alpha + \beta) + (\delta + 1)$$

"

$$\alpha + ((\beta + \delta) + 1)$$

$$= (\alpha + (\beta + \delta)) + 1$$

$$= ((\alpha + \beta) + \delta) + 1 = (\alpha + \beta) + (\delta + 1)$$

برای δ حدی:

$$\forall \delta' \in \delta \quad (\alpha + (\beta + \delta')) = (\alpha + \beta) + \delta'$$

$$\alpha + (\beta + \delta) = \alpha + \left(\beta + \bigcup_{\delta' \in \delta} \delta' \right)$$

$$= \alpha + \left(\bigcup_{\delta' \in \delta} \beta + \delta' \right) = \bigcup_{\delta' \in \delta} \alpha + (\beta + \delta')$$

$$= \bigcup_{\delta' \in \delta} (\alpha + \beta) + \delta' = (\alpha + \beta) + \bigcup_{\delta' \in \delta} \delta' \\ = (\alpha + \beta) + \delta$$

اگر $x < y$ ، $y \in B$ ، $x \in A$

order type

تقسیم (تسید جمع)

$Ord(A) = \alpha$

نوع ترتیب

فرض کنید A یک مجموعه باشد

$Ord(B) = \beta$

نوع ترتیب

و B یک مجموعه باشد

در $A \cap B = \emptyset$. روی $A \cup B$ ترتیب قبلی را تعریف کنید

در این صورت $\alpha + \beta = Ord(A \cup B)$

اثبات

(با استرا روی β)

برابر $B = 0$ ، $\alpha + \beta$ چیست ؟

$\alpha + \beta = \alpha = \alpha \cup \emptyset \quad \checkmark$

فرض کنید تغییر نوع برای β درست باشد .

یعنی تغییر $\alpha + \beta$ مطابق تقسیم است .

$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$

سوال آیا $\alpha + (\beta + 1)$ از قرار دادن $\beta + 1$ بعد از

α بدست می آید ؟

$(\alpha + \beta) + 1$ از اضافه کردن یک نقطه به $\alpha + \beta$ بدست می آید

$\alpha \quad \beta$

فرد $\alpha + \beta$ از قرار دادن β بعد از α بدست می آید

و آنگاه ثابت می شود .

لا روی

می دانیم که برابر $\beta \in \alpha$ ، $\alpha + \beta$ چه تغییری دارد .

$\alpha + \beta = \alpha \cup \beta$ پس این است که β را بعد از α بگذاریم .

لم

$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$

تمرین

① فرض کنید $\beta < \gamma$

نشان دهید

$\alpha + \beta < \alpha + \gamma$

② فرض کنید $\beta < \gamma$ نشان دهید

$\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$

③

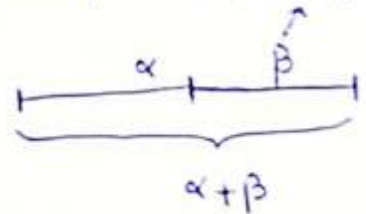
$(w+1) \cdot 2 \neq w \cdot 2 + 1 \cdot 2$

④

$(w \cdot 2)^2 \neq w^2 \cdot 2^2$

تغییر جمع ارنیال ها

یک پیک از β بعد از α



$\alpha = A$ $A \cap B = \emptyset$

$\beta = B$

روی $A \cup B$ ترتیب می گذاریم :

$x, y \in A$ $x < y \Rightarrow A$ ترتیب

$x, y \in B$ $x < y \Rightarrow B$ ترتیب

$$\alpha + \beta$$

$$\underbrace{\alpha \quad | \quad \beta}_{\alpha + \beta}$$

$$w+2$$

$$\text{-----}xx$$

$$2+w$$

$$xx\text{-----}$$

$w+2$ درتا عنصر بالاتر از w است
بنابراین به اردینال بزرگتر است و با
 w برابر نیست.

نظریه مجموعه ها

جمله هفتم

استرای نرا منتهای

$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$$

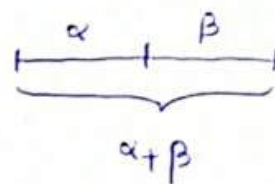
$$\alpha + U\beta = U(\alpha + \beta)$$

تبیین جمع اعداد

$$\alpha + \beta$$

یعنی β را بعد از α قرار دهید و اعداد

همای آن را بیابید.



بررسی می کنیم:

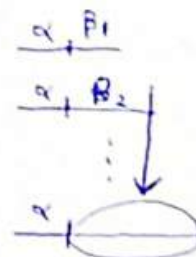
$$\alpha + 0 = \alpha$$

$$\underline{\alpha} \quad \checkmark$$

$$\alpha + (\beta + 1) \stackrel{تعین}{=} (\alpha + \beta) + 1$$

$$\underline{\alpha + \beta + 1}$$

$$\alpha + U\beta = U(\alpha + \beta)$$



تعریف ضرب اعداد

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$

$$\alpha \cdot (U\beta) = U(\alpha \cdot \beta)$$

تبیین ضرب

نمونه کنید A و B دو مجموعه خوش ترتیب باشند

روی $A \times B$ ترتیب زیر را در نظر بگیرید:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$$

هرگاه $y_1 < y_2$ یا $y_1 = y_2$ و $x_1 < x_2$

$\alpha \cdot \beta$ در واقع $O.t(A \times B)$ است.

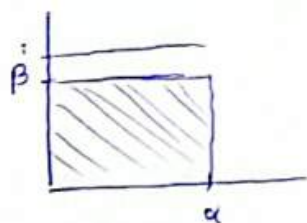
توجه $A \times B$ با ترتیبی که گفته شد

خوش ترتیب است.

$$\alpha \cdot 0 = 0$$

فرض کنید تبیین مورد نظر برای $\alpha \cdot \beta$ درست باشد

$$\alpha \cdot (\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha$$



توان اعدادها تبیین دارد.

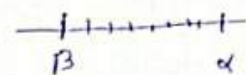
$$\underline{\text{تمرین}} \quad \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

لح فرض کنید α و β در اردیال باشند و

$\alpha \geq \beta$. در این صورت یک اردیال δ وجود دارد به طوری که $\beta + \delta = \alpha$

توجه: δ یکتا هم هست اما اثبات نمی کنیم.

اثبات



β یک بخش اولیه از α است.

$$A = \{ \kappa \mid \beta < \kappa < \alpha \}$$

$$\delta = o.t(A)$$

بنابراین تعبیر جمع اردیال ها $\alpha + \delta = \beta$

لح فرض کنید α و β در اردیال باشند و $\beta > 0$

در این صورت اردیال های یکتای δ_1 و δ_2 وجود

دارند به طوری که $0 < \delta_2 < \beta$ و $\alpha = \beta \delta_1 + \delta_2$

اثبات مجموعه زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \{ \delta \mid \beta \cdot \delta \leq \alpha \}$$

$$\delta_1 = \sup A$$

$$\alpha \geq \beta \delta_1$$

بنابراین لم قبل δ_2 وجود دارد به طوری که

$$\alpha = \beta \delta_1 + \delta_2$$

تقرین یکتایی δ_1 و δ_2 را گوییم کنید.

قضیه (فرم نرمال کانتور)

فرض کنید α یک اردیال باشد. در این صورت

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \omega^{\beta_2} k_2 + \dots + \omega^{\beta_n} k_n$$

که k_i ها عدد طبیعی اند و β_i ها اردیال اند.

(این فرم هم یکتاست)

اثبات اردیال α را در نظر بگیرید.

فرض کنید β_1 سوپریم مجموعه زیر باشد:

$$A = \{ \beta \mid \omega^\beta < \alpha \}$$

$$\alpha = \omega^{\beta_1} k_1 + \alpha'$$

سوال چرا k_1 عدد طبیعی است.

$\alpha < \omega^{\beta_1}$ بنا به فرض استرا که جمع متناهی

به فرم مورد نظر نیست.

فرض کنید E یک رابطه روی مجموعه P باشد

که E یک رابطه خوش بنیاد است

هرگاه هر مجموعه ناتهی $X \subseteq P$ دارای یک

عنصر ابتدا نیست به رابطه E باشد؛

یعنی عنصری مانند $x \in X$ وجود داشته باشد

که در X هیچ عنصری مانند y وجود نداشته باشد

که $x E y$

فرض کنید P یک مجموعه و E یک رابطه خوش بنیاد

روی P باشد. قرار دهید:

$$P_0 = \{x \in P \mid \nexists y \in P \quad y E x\}$$

قرار دهید:

$$P_{\alpha+1} = \{x \in P \mid \forall y \in P (y E x \rightarrow y \in P_\alpha)\}$$

$$P_\gamma = \bigcup_{\beta \in \gamma} P_\beta$$

حدی

ادعا ارجیل $\emptyset$ وجود دارد به طوری که

$$P_0 = P_{0+1}$$

(زوداً $\emptyset$ متناهی نیست)

تمرین نشان دهید که اگر $\alpha < \beta$ آنگاه

$$P_\alpha \subset P_\beta$$

زیر مجموعه های $P \rightarrow \text{Ord}$

$$P \xrightarrow{f} \text{Ord}$$

بنا به اصل جانشینی برد f باید یک ارجیل باشد

پس دنباله $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ یک مجموعه

از جایی به بعد ثابت است.

داریم:

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_\emptyset$$

$$P = P_\emptyset \quad \text{ادعا}$$

اثبات فرض کنید $P - P_\emptyset$ ناتهی باشد.

در این صورت یک عنصر $x \in P - P_\emptyset$ وجود دارد که

عنصر ابتداست. یعنی هیچ عنصری در $P - P_\emptyset$ نیست که

با x در رابطه باشد.

بنابراین عناصری که با x در رابطه هستند، در $P_\emptyset$

هستند. یعنی $x \in P_{0+1} = P_\emptyset$ که این تناقض است چرا که

x در $P_\emptyset$ خواهد افتاد.

کار دینال ها

- فرض کنید X و Y در مجموعه باشند

می نویسیم $|X| < |Y|$ هرگاه

یک تابع یک به یک از X به Y وجود داشته باشد

- می نویسیم $|X| = |Y|$ هرگاه یک تابع یک به یک

در پوشا از X به Y وجود داشته باشد.

- می نویسیم $|X| < |Y|$ هرگاه یک تابع ۱-۱

از X به Y وجود داشته باشد اما هیچ

تابع ۱-۱ در پوشایی از X به Y وجود نداشته باشد.

توجه فرض کنید X یک مجموعه باشد.

ما $|X|$ را تکریف نکرده ایم.

$|X| < |Y|$ تکریف شده است اما $|X|$ نه!

بعداً خواهیم دید که برای تکریف $|X|$ نیاز به

اصل انتخاب داریم.

قضیه (کانتور)

$$|X| < |P(X)|$$

اثبات یک تابع یک به یک از X به $P(X)$

ارائه کنید:

$$X \rightarrow P(X)$$

$$x \mapsto \{x\}$$

مثال فرض کنید

$$f: X \rightarrow P(X) \text{ یک تابع پوشا است.}$$

$$\begin{array}{ccc} t & \mapsto & f(t) \\ \text{عضو } X & & \text{زیر مجموعه } X \end{array}$$

قرار دهید:

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$

واضح است که $A \subseteq X$ (زیر مجموعه ای)

از X است که

$$f(u) = A$$

باید برابر با A

یک u شود اگر

قرار بر پوشایی باشد

$$\text{سوال آیا } u \in f(u) \text{ ؟}$$

خواهیم دانست:

$$u \in f(u) \iff u \notin f(u)$$

پس تناقضی

آنها هیچ تابع پوشا نیست.

$$|P(A)| = |2^A|$$

اثبات (تمرین)

قضیه (کاتوره - برشتاین)

اگر $|x| \leq |y|$ و $|x| \leq |y|$

آنگاه $|x| = |y|$

مسئله

۱) داریم که $|x| < |p(x)|$

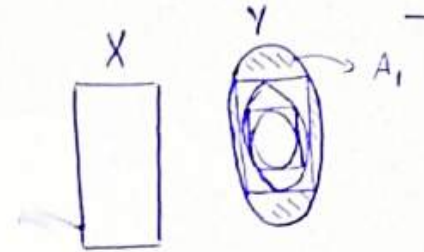
۲) اگر $|x| \leq |y|$ و $|x| \leq |y|$ آنگاه $|x| = |y|$

مسئله این است که آیا نزدیکی اینگونه است که یا

$|x| \leq |y|$ یا $|x| \leq |y|$ ؟

(امل انتخاب !)

اثبات



چون تابعی از X به Y هست،

یعنی تصویر از X در Y هست و

همینطور برای Y این قضیه را داریم.

هدف پیدا کردن یک تابع از Y به X

از Y به X (از دایره بزرگ به مربع بزرگ)

عناصر A_n را به تصویرشان در A_{n+1} ببریم.

عناصر خارج از A_n ها را دست نزنیم. پس:

$$H: Y \rightarrow X$$

$$H(t) = \begin{cases} \text{عادل } t \text{ در } A_{n+1} & t \in A_n \\ t & t \notin A_n \end{cases}$$

این تابع از Y به X است.

نظریه مجموعه ها

جلسه هشتم

تمرین چرا X^y یک مجموعه است؟

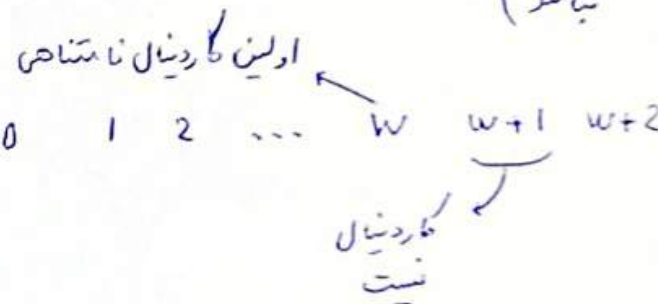
کاردینال ها

هدف یک نوع خاصی از اردینال ها را کاردینال بنامیم.

تعریف اردینال α را یک کاردینال می نامیم هرگاه

برای هر $\beta \in \alpha$ داشته باشیم $|\beta| \neq |\alpha|$

(یعنی α با هیچ اردینال قبل از خودش هم توان
نیاست)



تعریف فرض کنید α یک اردینال باشد

(و نه) $|\alpha| =$ (اولین) اردینالی که هم توان α است.

فرض کنید w یک مجموعه خوشترتیب است

$$|w| = |\alpha|$$

که $\alpha = \text{ot}(w)$

فرض کنید α یک اردینال باشد.

در این صورت یک بزرگتر از α وجود دارد.
مثلاً کاردینال

اثبات

فرض کنید X یک مجموعه باشد. قرار دهیم:

$$A(X) = \left\{ \beta \in \text{Ord} \mid \begin{array}{l} \text{از } \beta \text{ به } X \text{ هیچ} \\ \text{تابع ۱-۱ وجود ندارد} \end{array} \right\}$$

(ادامه اثبات) برای اردینال α ، $A(\alpha)$ را

در نظر بگیرید. کوچکترین عنصر $A(\alpha)$ یک کاردینال
بزرگتر از α است.

سوال چرا مبنی دوم مورد نظر یک کاردینال است؟

یادآوری دیگر A زیرکلاسی از Ord باشد

در این صورت

A دارای عنصر ابتداست.

اردینال های را در نظر بگیرید که از آنها به X

یک تابع ۱-۱ وجود دارد

این مجموعه، زیرمجموعه های
تعدادشان کم است. نهایتاً $|A(X)|$
خوشترتیب شده X است.

بنابراین اردینال های زیادی وجود دارند که در $A(X)$ هستند.

تشریح مجموعه ها

جلسه نهم

بعضی از اردینال ها کاردینال هستند.

اردینال α را یک کاردینال می نامیم هرگاه

α با هیچ اردینال $\beta < \alpha$ هم توان نباشد.

قضیه برای هر اردینال α یک کاردینال $\beta < \alpha$

وجود دارد.

اثبات برای مجموعه X ، $A(X)$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$A(X) = \left\{ \beta \mid \begin{array}{l} \text{هیچ تابع ۱-۱ از } \beta \\ \text{به } X \text{ وجود ندارد} \end{array} \right\}$$

باید نشان دهیم $A(X)$ ناتمام است. کوچکترین عنصر

$A(X)$ مطلوب ماست. (در واقع $A(\alpha)$ مطلوب

ماست)

توجه هر اردینال β که از آن به X یک تابع ۱-۱

وجود داشته باشد، یک زیرمجموعه خوشترتیب

از X را معلوم می کند.

در واقع β یک رابطه خوشترتیب روی یک

زیرمجموعه از X مشخص می کند.

تمام روابط

خوشترتیب روی

تمام زیرمجموعه های X

$$\xrightarrow{f} \text{Ord}$$

$$(A, <) \mapsto \delta_{\sigma = \text{ot}(A, <)}$$

بنا به اصل جانشانی تصویر P یک مجموعه است.

پس اردینال های فراوانی در تصویر P قرار نمی گیرند.

الف ها

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & \omega & \rightarrow \\ & & & & \downarrow & \\ & & & & X_0 & \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \end{array}$$

بعد از هر اردینال یک کاردینال وجود دارد.

چون کوچکترین کاردینال بعد از یک اردینال وجود

دارد.

تعریف

$$X_0 = \omega$$

$$X_{\alpha+1} = X_\alpha \text{ اولین کاردینال پس از } X_\alpha$$

$$X_\delta = \bigcup_{\beta < \delta} X_\beta \quad (\text{تعریف مهم})$$

(نم بنویس)

* به اندازه Ord ما کاردینال داریم.

$$(X_\alpha)_{\alpha \in \text{Ord}}$$

تکمیل نشان دهید که α های وجود دارند به طوری که

$$X_\alpha = \alpha$$

مثلاً:

$$X_0 \cdot X_0 = ?$$

(دقتی از کاردینال $\aleph$ حرف می زنیم)
از X_0 استفاده می کنیم.

$$\aleph \times \aleph = \aleph$$

$$\Rightarrow X_0 \cdot X_0 = X_0$$

فرض کنید α یک کاردینال نامتناهی باشد.

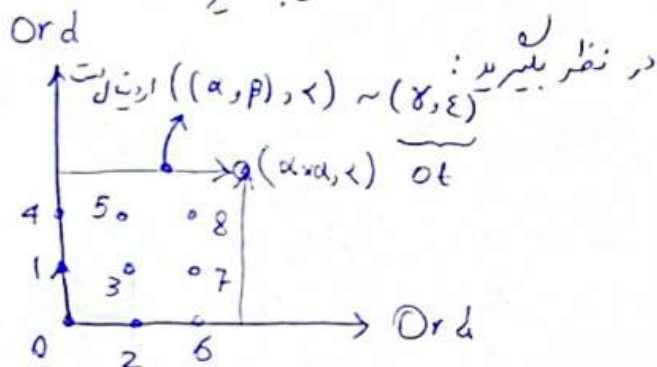
$$(\alpha \cdot \alpha = \alpha) \quad | \alpha \times \alpha | = \alpha$$

$$(X_\beta \cdot X_\beta = X_\beta)$$

$$(X_\beta \cdot X_\beta = X_\beta \text{ نوی})$$

اثبات

ردی $\text{Ord} \times \text{Ord}$ ترتیب زیر را



$$(\alpha_1, \beta_1) < (\alpha_2, \beta_2)$$

$\Leftrightarrow$

$$(\max \{ \alpha_1, \beta_1 \} < \max \{ \alpha_2, \beta_2 \})$$

$$\left(\max_{\text{ردی}} = \max_{\text{ردی}} \wedge \alpha_1 < \alpha_2 \right)$$

$$\left(\max_{\text{ردی}} = \max_{\text{ردی}} \text{ و } \alpha_1 < \alpha_2, \beta_1 < \beta_2 \right)$$

فرض کنید X یک مجموعه از کاردینال ها باشد

در این صورت $\sup X$ یک کاردینال است.

اثبات فرض کنید $\sup X$ کاردینال نباشد.

در این صورت $\aleph < \sup X$ وجود دارد

به طوری که $\aleph = \sup X$ کاردینال

چون $\aleph$ ، $\sup$ نیست، $\beta \in X$ وجود دارد

به طوری که $\aleph < \beta$ بنابراین از $\sup X$

به یک عنصر $\beta \in X$ تابع یک به یک پیوسته است.

$$\sup X \rightarrow \beta$$

$\Downarrow$

$$|\sup X| < \beta$$

β کاردینال است. داشتیم
 $\beta < |\sup X|$

$$|\sup X| = |\beta| = \beta$$

$$\beta = \sup X = \aleph$$

که این تناقض چرا که $\beta < \aleph$ و $\aleph = \beta$
کاردینال

فترت کاردینال ها

$$|A|$$

$$|B|$$

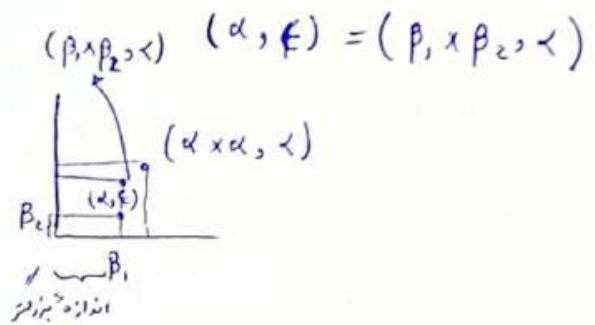
$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

ادعا ۱: یک خوشترتیبی روی Ord است.

ادعا ۲: تمام اردینال‌ها در این دیارام پرسیده می‌شوند.

اثبات حکم با استرا روی $|\alpha|$

فرض کنید $|\alpha| > |\alpha \times \alpha|$ یعنی فرض کنید از $\alpha \times \alpha$ تابع یک به یک نداشته باشیم. در این صورت
 $(\alpha \times \alpha, <) < (\alpha, <)$ بنا بر این اردینال



بنا بر این $(\alpha \times \beta, <) < (\beta, <)$

از طرفی $|\beta| = |\beta|$

چون $|\alpha| < |\alpha|$

از طرفی از α به β تابع ۱-۱ پیدا می‌شود که این تناقض است.

$$\alpha = (\beta_1, \beta_2) < (\beta_1, \beta_1)$$

که این خود β است.

و این تناقض است با $|\beta| < |\alpha|$

خاندن‌داره و رنغ ایهام

$|\alpha| \rightarrow \alpha$ اردینال
 را تعریف کردیم

برای یک X خوشترتیب هم چون $\alpha \sim X$ ،
 $|X|$ تعریف می‌شود اما برای مجموعه دلخواه X
 فلا $|X|$ معنی ندارد.

قرارداد $|X| = X_0$

منظور همان این است که $X \sim W$

نتیجه فرض کنید $\beta > \alpha$ در این صورت

$$\alpha \cdot \beta = \beta$$

چرا؟

$$\beta \leq \alpha \cdot \beta \leq \beta \cdot \beta \leq \beta$$

طبق کاتسند-برنشتاین:

$$\alpha \cdot \beta = \beta$$

تمرین $X_0 = 2^{X_0}$ مجموعه توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$

$$2^{X_0} \leq X_0 \leq (2^{X_0})^{X_0} = 2^{X_0}$$

تمرین تعداد زیرمجموعه‌های متناهی $\mathbb{N}$ را بیابید

" توابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{N}$ "

" زیرمجموعه‌های نامتناهی $\mathbb{N}$ "

نتیجه

$$|A| + |B| = |A \cup B| \quad A \cap B = \emptyset$$

$$|A| \cdot |B| = |A \times B|$$

$$|A^B| = |\text{تمام متابع از } B \text{ به } A|$$

نتیجه فرض کنید $\beta > \alpha$ به عنوان کاردینال

$$\alpha + \beta = \beta \quad \text{در این هورت}$$

$$\beta \leq \alpha + \beta \leq \beta + \beta = \beta$$

$$\alpha + \beta = \beta \quad \text{طبق قانون برشتاین}$$

هم بیان Co finality

فرض کنید α یک اردینال باشد

فرض کنید $(\alpha_i)_{i \in I}$ این گونه باشد که

برای هر $\alpha \in \alpha$ یک عنصر $t \in \alpha_i$ $\alpha > \alpha_i$

وجود داشته باشد. در این هورت می نویسیم

دنباله $(\alpha_i)_{i \in I}$ در α هم بیان است.

می نویسیم $\text{cf}(\alpha) = \beta$ هرگاه β کوچکترین اردینالی باشد

که یک دنباله $(\alpha_i)_{i \in I}$ هم بیان در α وجود داشته

باشد.

سوال $\text{cf}(w) = ?$



$$\text{cf}(w) = w$$

سوال $\text{cf}(X_w) = ?$

$$\text{cf}(X_w) = w$$

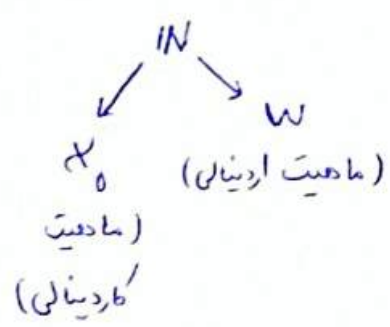
کاردینال های $X_{\alpha+1}$
کاردینال های X_α
کاردینال های X_α
* فرق دارد با اردینال های *

سوال آیا کاردینال های مانند α غیر از X_0
وجود دارد که $\text{cf}(\alpha) = \alpha$ ؟
 $\text{cf}(X_\beta) = X_\beta$

φ از ZFC مستقل است

$$\text{ZFC} \nvdash \varphi$$

$$\text{ZFC} \nvdash \neg \varphi$$



$$w + w > w \quad \text{ماهیت اردینال با}$$

$$X_0 + X_0 = X_0 \quad \text{کاردینال تناوب دارد}$$

$$cf(\omega) = \omega$$

طول دنباله
را هم پایانی
کنید.

$$cf(\omega+1) = 1$$

ω

هم پایانی خیلی به درد اردیال های کالی نمی خورد.

$$cf(X_\omega) = \omega$$

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

$$cf(X_1) = ?$$

لیم $cf(\alpha)$ یک کاردینال است.

$$(a_i)_{i < cf(\alpha)}$$

فرض کنید از $cf(\alpha)$ به یک اردیال کمتر از $cf(\alpha)$

به نام β تابع یک به یک وجود داشته باشد.

در این صورت $cf(\alpha)$ کوچکترین اردیال ممکن است
که با آن بتوان به انتهای α رسید.

فرض کنید $(a_i)_{i < cf(\alpha)}$ یک دنباله هم پایانی در

$$\alpha \text{ باشد. فرض کنید } |cf(\alpha)| = \beta$$

$$\beta < cf(\alpha)$$

در این صورت از $cf(\alpha)$ به β یک تابع α -ا وجود دارد

$$cf(\alpha) \xrightarrow{f} \beta$$

$$(a_{f(i)})$$

این نکته ناتنی تفریق $cf(\alpha)$ است چرا که

نمی دانیم لزوماً تابع محدودی است اما

توجه تابع f در β متوقف نمی شود.

اگر متوقف می شد (یعنی جایی مثل α قطع شود)

آنگاه cf برابر β نمی شد برابر α می شود.

$$\lim cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$$

اثبات فرض کنید $\beta, cf(cf(\alpha))$ که $\beta < cf(\alpha)$

این تناقض است چرا که β با β زودتر به

انتهای α می رسید.

تعریف

کاردینال α را منتظم می نامیم هرگاه:
 $cf(\alpha) = \alpha$ regular

کاردینال غیر منتظم را تکلیف می نامیم.
singular

(نمایش)

سوال آیا یک کاردینال می تواند α وجود دارد
که $cf(\alpha) = \alpha$ ؟



به این کاردینال ها دست نیافتنی می گویند

توجه اگر α یک البتاس باشد در این صورت
 $cf(\alpha) = \alpha$
(بعبارت)

* وجود کاردینال دست نیافتنی مفید را جمله φ می گویند.

توجه

$$ZFC \vdash \varphi$$
$$ZFC \vdash \neg \varphi$$

وجود اردینال های دست نیافتنی مفید از ZFC مستقل است.

توجه این هم ثابت نمی شود که ZFC تناقضی نمی دهد

تمرین

فرض کنید α و β در اردینال باشند.

در این صورت $|\alpha|$ و $|\beta|$ دو کاردینال هستند.

$$|\alpha| < |\beta| \iff \alpha < \beta$$

به عنوان اردینال به عنوان کاردینال

به بیان دیگر فرض کنید $\alpha < \beta$ و $|\beta| = \beta$

$$|\alpha| < |\beta| \iff \alpha < \beta$$

اصول ZFC

اصول نظریه مجموعه ها هستند.

تعمیم تمامیت اگر اصول ZFC با هم تناقضی ندهند
در این صورت مدلی برای اصول ZFC وجود دارد.
یعنی جهانی برای مجموعه ها وجود دارد.

جمله φ : تنها کاردینال مدلی دست نیافتنی همان $\aleph_0$ است.

$$ZFC \vdash \varphi$$

اگر جهانی برای ZFC وجود داشته باشد

آنگاه جهانی برای ZFC وجود دارد که

φ درست است.

(توجه) اگر $ZFC \vdash \varphi$ آنگاه در تمامی جهان ها ZFC برقرار می خورد

ادامه

از طرفی $2FC1 \neq \varphi$. بنابراین اگر جهانی برای
مجموعه‌ها وجود داشته باشد جهان وجود دارد که در
آن φ درست است.

تعامت

یک نظریه ریاضی

$\varphi \vdash T \Leftrightarrow \varphi$ در تمام جهان‌های که

از اصول T پیروی می‌کنند
درست باشد.

$\varphi \vdash T \Leftrightarrow \varphi$ یک جهان باشد که از اصول T

پیروی می‌کند ولی در آن φ
درست باشد.

فرض کنید X_α یک کاردینال دست نیافتنی خفیف باشد

در این صورت X_α برابر

$$X_\alpha = cf(X_\alpha) \text{ و } cf(\alpha) \leq \alpha$$

↓
همی

می‌دانیم که

$$K \prec_2 K \text{ در نتیجه } K \prec K^K$$

$$K \prec K^{cf(K)} \text{ نتیجه}$$

اثبات

فرض کنید که از $K^{cf(K)}$ به K تابع یک به یک وجود
داشته باشد.

$cf(K)$

K : تمام توابع از $cf(K)$ به K

فرض کنید $(f_i)_{i < K}$ شمارشی از تمام این توابع باشد.

نظریه مجموعه ها

جلسه یازدهم

جلسه قبل: $cf(\alpha)$ یک کاردینال است.

فرض کنید α یک اردینال دلخواه باشد و کاردینال نباشد.

از $|\alpha|$ به α یک تابع یک به یک و پوشا وجود دارد.

ادعا $cf(\alpha) \leq |\alpha|$

ادعا یک دنباله هم پایان با α با اندیس در $|\alpha|$ وجود دارد.

① $cf(\alpha) \leq |\alpha|$

② $cf(\alpha)$ یک کاردینال است

$|cf(\alpha)| = cf(\alpha)$

③ $cf(cf(\alpha)) = cf(\alpha)$

با این برهان که فرض کنیم

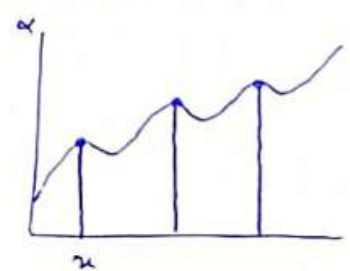
$\underbrace{|cf(\alpha)|}_{\beta} < cf(\alpha)$

① باید نشان دهیم قله ای وجود دارد

② قله ها محدودی اند. اگر اینجوری نباشد

کل α را نمی توانیم پوشش دهیم.

$|\alpha| \xrightarrow{f} \alpha$

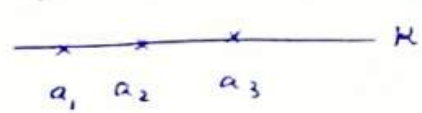


قله x را یک قله می نامیم هرگاه

$\forall \delta < x \quad f(\delta) < f(x)$

ادعا نشان دهیم که مجموعه قله ها نا تهی است (متمم)

فرض کنید κ یک کاردینال کسین باشد. $(cf(\kappa) < \kappa)$



$(a_i)_{i < \beta}$

$\sup(a_i) = \kappa$

$s_i = \{t \in \kappa \mid t < a_i\}$

$\kappa = \bigcup_{i < \beta} s_i$

ادعا مجموعه قله ها در α هم پایان است.

و از هر قله یک قله بزرگتر پیدا می شود.

تعداد i ها برابر β است که $\beta < \kappa$

همچنین $|S_i| < \kappa$

مبنی κ برابر است با اجتماع i از $\beta < \kappa$

مجموعه با اندازه $\kappa < \aleph_1$

قضیه فرض کنید κ یک کاردینال باشد و

$\kappa = \bigcup_{i < \beta} S_i$ و $\beta < \kappa$ و $|S_i| < \kappa$. در این صورت

κ تکلیف است.

اثبات دنباله $(a_i)_{i < \beta}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$$a_i = \sup_{j < i} (U S_j)$$

چرا $\sup$ داریم؟ $(a_i)_{i < \beta}$

$$\sup_{i < \beta} (a_i) = \kappa \quad \text{ادعا}$$

$$\sup(a_i) = \alpha \quad \text{فرض کنیم}$$

$$\kappa \mapsto \beta \times \alpha$$

$$\kappa \mapsto (i, \sup_{j < i} (a_j))$$

$$|\beta \times \alpha| \geq |\kappa|$$

$$\Rightarrow |\alpha| = |\kappa|$$

اعداد حقیقی

میدان اعداد حقیقی تنها میدان مرتب کامل است که شامل $\mathbb{Q}$ (به عنوان زیرمیدان) است.

گانتور: میدان اعداد حقیقی شمارا نیست.

اثبات

فرض کنید $\mathbb{R}$ به صورت زیر شماره شده باشد:

$$c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots$$

هدف ساختن یک دنباله (a_i) و یک دنباله (b_i)

$$a_0 = c_0 \quad \text{و} \quad b_0 : c_1 > a_0$$

از این منظورمان از نظر اندیس است

$$a_i : c_i \text{ بین } a_{i-1} \text{ و } b_{i-1} \text{ باشد}$$

$$a_{n+1} = \dots$$

$$b_{n+1} = \dots$$

$$\dots > i_3 > i_2 > i_1 \quad \text{مساعده}$$

$$\alpha = \sup(a_i) \quad \text{قرار دهید}$$

تقریب نشان دهید که α با هیچ کدام از c_i ها برابر نیست

$$\sup a_i = c_j \quad \text{فرض کنیم}$$

اندیس j از تمام i ها بزرگتر است.

$$c_j \in (a_i, b_i) \quad \text{از آنجا که}$$

$$c_k = a_{i+1} \quad \text{اندیس } j \text{ از } k \text{ بیشتر است.}$$

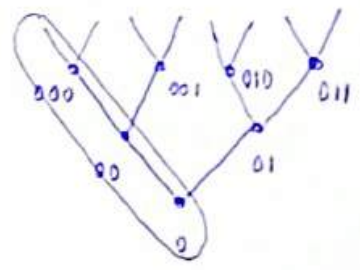
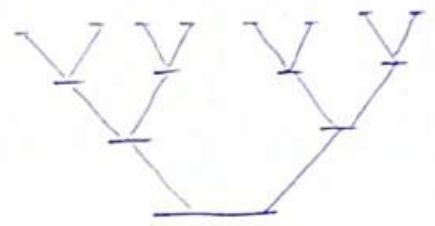
$\mathbb{R}$ شمارا نیست ($|\mathbb{R}| > \aleph_0$)

پس $|\mathbb{R}| < 2^{\aleph_0}$

زیرمجموعه‌های $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$

$x \mapsto \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$
(لم) $|\mathbb{R}| > 2^{\aleph_0}$

مجموعه کانتور $C \subseteq \mathbb{R}$



$$\Rightarrow |C| = 2^{\aleph_0}$$

می‌شود هر عنصر مجموعه کانتور را اینگونه نوشت:

$$\sum a_i 3^{-i}$$

$$a_i \neq 1, a_i \in \{0, 2\}$$

مجموعه کانتور در تناظر یک به یک با مجموعه توان $\mathbb{N}$ به $\{0, 2\}$ است.

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$$

آیا $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای دارد که اندازه‌اش $\aleph_0$ باشد؟

سوال آیا $\mathbb{R}$ یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی شمارا دارد که اندازه‌اش $2^{\aleph_0}$ نباشد؟

$$CH: \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

$$ZFC \not\vdash CH$$

$$ZFC \not\vdash \neg CH$$

نظریه مجموعه ها
جلسه دوازدهم

$$F_{\alpha+1} = F'_\alpha$$

$$F_\gamma = \bigcap_{\beta \in \gamma} F_\beta$$

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$$

ادعای اول دنباله F_i ها متوقف می شود

$$\supseteq \dots \supseteq F_\theta = F_{\theta+1}$$

(بنا به اصل جانشینی)

تئرم

← (۲۴)

زیر مجموعه بسته $P \subseteq \mathbb{R}$ را perfect می نامیم
هرگاه تمامی نقاط آن حدی باشند.

توجه F_θ تام است.

$$F_\theta = F_{\theta+1} \quad \text{چون}$$

ادعا $F - F_\theta$ یک مجموعه شماراست.

اثبات

$$F - F_\theta = \bigcup_{\alpha < \theta} (F_\alpha - F_{\alpha+1})$$

فرض کنید (I_j) شمارشی از تمام بازه های با انتهای تریا باشد.

$$x \in F_\alpha - F_{\alpha+1} \iff x \text{ یک نقطه از بازه } F_\alpha \text{ است.}$$

CCC

Countable Chain Condition

مجموعه ای این خاصیت را دارد که تعداد بازه ها باز دو به دو مجزا در آن حد اکثر شمارا باشد.

توجه تعداد بازه های دو به دو مجزا در $\mathbb{R}$ چقدر است؟

پاسخ حد اکثر شمارا. علت هر چنین بازه ای شامل یک عدد نویاست (حدائق)

Suslin Problem

۴:

هر مجموعه مرتب خطی بر کران (از بالا و از پایین) و چگال و کامل و دارای دیرری CCC
ایزدمرف با $(\mathbb{R}, <)$ است

توجه ۴ از ZFC مستقل است.

سوال زیر مجموعه های بسته نامشمارای $\mathbb{R}$ چه اندازه ای دارند؟

فرض کنید $F \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه بسته باشد.

یک دنباله (F_i) از مجموعه ها به صورت زیر

$$F_0 = F$$

$$F_1 = F'_1 \quad F_1 \subseteq F_0$$

$$F_2 = F'_1$$

ببازید

فرض کنیم I بازه‌ای باشد که x را ایزوله می‌کند:

$$I \cap F_\alpha = \{x\}$$

فرض کنید:

$$x \in F_9 - F_5 \quad I \cap F_4 = \{x\}$$

$$y \in F_{10} - F_{11} \quad J \cap F_{10} = \{y\}$$

بازه ایزوله کننده J

$$x \notin F_5$$

$$y \notin F_{10}$$

سوال آیا بازه J می‌تواند با F_4 اشتراک داشته باشد؟

خیر.

از آنجا که x و y در در بازه مجزا قرار می‌گیرند.

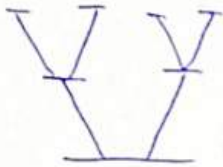
نتیجه $F - F_0$ که اجتماع بازه‌های مجزاست، می‌باشد.

قضیه فرض کنید $F \subseteq \mathbb{R}$ بسته باشد. در این صورت $F = P \cup S$ که P تمام و S شماراست.

قضیه فرض کنیم $P \subseteq \mathbb{R}$ یک مجموعه تمام باشد.

در این صورت $|P| \leq 2^{\aleph_0}$

اثبات (اینکه $\aleph_0 < |A|$)



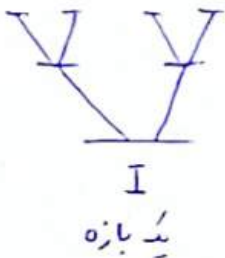
مجموعه $\aleph_0$ متناهی

هر مسیر یک دنباله را مشخص می‌کند.

تعداد مسیرها: $2^{\aleph_0}$

چون هر مسیر یک دنباله از $\mathbb{N}$ به $\{a_n\}$ است.

اثبات قضیه



یک بازه

باشد که ثابت می‌کنیم.

نتیجه فرض کنید $F \subseteq \mathbb{R}$ بسته و نامشمار باشد.

در این صورت $|F| \leq 2^{\aleph_0}$

اثبات $F = P \cup S$ نامشمار (تمام)

نظریه مجموعه ها

جلسه سیزدهم

اثبات مجموعه دلخواه A را در نظر بگیرید
از Ord به A یک تابع به صورت زیر
تعریف کنید:

$$f: \text{Ord} \rightarrow A$$

انتخاب یک عنصر از

$$A - \{f(x) \mid x < \alpha\}$$

این تابع حتماً باید بایستد (به یک اصل

جاسمانی). بنابراین دامنه تابع فوق

یک اوردینال α است. یعنی A در تناظر

با یک اوردینال قرار میگیرد. پس A خوش ترتیب است.

یادآوری

$$G: V \rightarrow V$$

$$f: \text{Ord} \rightarrow V$$

$$f(\alpha) = G(\{f(x) \mid x < \alpha\})$$

G یک تابع انتخاب روی $P(A)$ است.

$$G = G_1(A - \{f(x) \mid x < \alpha\})$$

G_2

$\downarrow$

این خود نیز تابع است.

- این امکان پذیر نیست که در هر مرحله یک تابع

انتخاب تعریف کنیم. از ابتدا باید یک تابع

انتخاب فیلس کنیم.

- تابع انتخاب یعنی خوش ترتیبی. اینجوری نیست که

همینجوری انتخاب کنه. برای هر t یک $f(t)$ هست

اصل انتخاب

(axiom of
choice)

فرض کنید $X \neq \emptyset$. در این صورت یک تابع

$f: X \rightarrow \cup X$ وجود دارد به طوری که

$$\forall t \in X \quad f(t) \in t$$

خلاصه برای هر مجموعه X یک تابع انتخاب

وجود دارد.

توجه $ZF \not\models \text{Choice}$

$ZF \models \neg \text{Choice}$

توجه اگر ZF سازگار باشد، ZFC هم سازگار

است.

تمرین اگر X متناهی باشد، نیازی به اصل انتخاب

برای تابع انتخاب نیست.

قضیه هر مجموعه دلخواه خوش ترتیب شدنی است.

(فرض کنید A یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت

می توان یک ترتیب بین اعضای A تعریف کرد که این

ترتیب، خوش ترتیب باشد)

ثابت کردیم هر مجموعه ای خوش ترتیب است
(اصل خوش ترتیب)

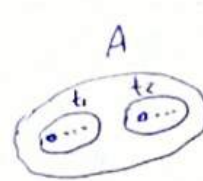
نشان دادیم که اصل خوش ترتیب از اصل انتخاب
نتیجه می شود.

ادعا اصل انتخاب هم از اصل خوش ترتیب
نتیجه می شود.

هدف پیدا کردن یک تابع

$$A \xrightarrow{f} UA$$

$$t \mapsto f(t)$$

$$f(t) \in t$$


توجه UA خوش ترتیب است.

کافی است
تتابع f به صورت زیر
تعریف شود:

$$f(t_i) = \min t_i$$

نشان دادیم که این تابع انتخاب وجود دارد.

توجه قبلاً در مورد $|X| \leq |Y|$ صحبت کردیم
 $|X| < |Y|$

فرض کنید X یک مجموعه باشد.

بنا به اصل خوش ترتیب X باید اردیال در

تأثیر یک به یک است.

در واقع روی X یک ترتیب داریم که

$$(X, <) \sim (\alpha, \epsilon)$$

تکرار دهید:

کوچکترین اردیالی که $|X| < |A|$
با α هم توان است.

مشاهده فرض کنید $|X| < |Y|$ با ترتیب سابق

در این صورت $|X| < |Y|$ (با ترتیب اردیال ها)

فرض کنید $|X| < |Y|$ (با ترتیب سابق)

$|X|$ و $|Y|$ دو اردیال هستند

یا $|X| < |Y|$ به عنوان اردیال

یا $|X| < |Y|$ به عنوان اردیال

این مورد غیر ممکن است چرا که این بین
از Y به X تابع f پیدا می شود.

* عکس این مشاهده هم درست است.

قضیه فرض کنید X و Y در مجموعه باشند

در این صورت یا یک تابع f از X به Y وجود دارد
یا یک تابع f از Y به X وجود دارد.

لم زرن (Zorn's Lemma)

فرض کنید $(X, <)$ یک مجموعه مرتب جزئی است.
فرض کنید هر زنجیر در X دارای یک کران بالا باشد.
در این صورت X دارای یک عنصر ماکسیمال است.

یعنی عنصری هست
که چیزی بالاتر نیست

اثبات

ادعا: اگر حکم لم زرن نباشد، زنجیری به طول
ord پیدا می شود، این تناقض است.
(به خاطر اهل جانشانی)

$$\text{Ord} \rightarrow X$$

$$\alpha \mapsto \text{یک کران بالا برای مجموعه} \\ \{f(\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$$

$$G_1: \text{یک تابع انتخاب روی } P(X)$$

$$G_2: A \rightarrow A \text{ رانگ های بالای } A$$

$$G_1 \circ G_2$$

بازگشت فراگناهی

(جایی که می ایستد عنصر ماکسیمال را می دهد)

سوال آیا این که لم زرن را فقط برای

زنجیرهای شمارا تقلیل دهم کافی است؟

اثبات تابع بودن $f = UA$

فرض کنید

$$x_1, x_2 \in D_f \text{ و } x_1 = x_2$$

$$x_1 \in D_{f_{i_1}} \text{ آنگاه } f_{i_1} \in A \text{ وجود دارد}$$

$$x_2 \in D_{f_{i_2}} \text{ و } f_{i_2} \in A \text{ وجود دارد}$$

$$(f_{i_1} \subseteq f_{i_2} \text{ فرض کنید})$$

$$\text{بنابراین } x_1, x_2 \in D_{f_{i_2}} \text{ پس } f(x_1) = f(x_2)$$

* لزوماً اجتماع توابع، تابع نیست. مثلاً:

$$f_1 = \{(x_1, y_1)\} \quad (y_1 \neq y_2)$$

$$f_2 = \{(x_1, y_2)\}$$

$$U f_i = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2)\}$$

در حالیکه $U f_i$ تابع نیست.

ادامه اثبات بنا به لم وزن A دارای عضو مالکمال است. یعنی یک تابع جزئی انتخاب مالکمال وجود دارد (به نام g).

$$\text{ادعا } \text{dom } g = X$$

فرض کنید $x_1 \notin \text{dom } g$. یک عنصر $y \in X$ را در نظر بگیرید. تابع $\{(x_1, y)\} \cup g$ را در نظر بگیرید. این تابع مالکمال بودن و نقض می‌کند.

لم وزن $\Leftarrow$ اصل انتخاب

اثبات لم وزن برقرار است.

هدف اثبات اصل انتخاب

فرض کنید X یک مجموعه باشد که $\emptyset \neq X$

ادعای کنیم یک تابع انتخاب برای X وجود دارد.

این تابع مورد نظر را عضو مالکمال از یک مجموعه توابع خواهیم گرفت.

قرار دهید: یعنی دامنه‌اش زیرمجموعه X باشد

$$A = \text{مجموعه توابع جزئی انتخاب از } X$$

آمر ناتمام است. (چرا؟)

روی A ترتیب شامل را قرار دهید:

$$f_1 \leq f_2 \iff f_1 \subseteq f_2$$

بررسی کنید این ترتیب، ترتیب جزئی است.

فرض کنید A یک زنجیر در A باشد.

ادعای کنیم A دارای یک کران بالا در A است.

اثبات ادعا UA یک تابع جزئی انتخاب است که

از همه توابع این زنجیر بزرگتر است.

تعریف اجتماع شماراتنا مجموعه شمارات، شماراست.

اثبات فرض کنید $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ یک خانواده ای شمارات از مجموعه های شمارا باشد.

A_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	...
A_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...
A_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	...
$\vdots$				

$$\cup A_i \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

بنابراین $| \cup A_i | = \aleph_0$

اما چرا از اصل انتخاب استفاده کردیم؟
فرض کنید $\{a_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ شماراتی برای A_i باشد
(اصل انتخاب)

A_i شماراست: یک تابع از $\mathbb{N}$ به A_i وجود دارد.

$$f_i: \mathbb{N} \rightarrow A_i$$

از بین توابعی که A_i را می شمارند یکی انتخاب می کند.

توجه اصل انتخاب نقطه یک بار انتخاب شده است.

$$cf(X_i) = X_i$$

$$\begin{aligned} \kappa = \text{اجتماع } \aleph_n \text{ مجموعه با اندازه کمتر از } \kappa \\ (\aleph < \kappa) \\ \Downarrow \\ cf(\kappa) < \kappa \end{aligned}$$

$$\sup_{X \in S} |X| \leq |S|$$

اثبات

فرض کنید $S = \{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ و $\kappa = \sup_{X \in S} |X|$

$$US \xrightarrow{1-1} \aleph \times \kappa$$

فرض کنید $X_i = (x_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ شماراتی برای X_i باشد.
* تابع عددنما:

$$(j, i) \mapsto x_{ji}$$

* اصل انتخاب می گوید که تابعی است که همزمان همه انتخاب ها را انجام می دهد.

$$cf(X_{\aleph_1}) = X_{\aleph_1}$$

قضیه مجموعه X خوش ترتیب است $\Leftrightarrow$ اگر هیچ دنباله نزولی نامتناهی از اعضای X به صورت $x_0 > x_1 > x_2 > \dots$ پیدا نشود.

اثبات فرض کنید X خوش ترتیب باشد. فرض کنید تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ اکیدا نزولی باشد. بنابر اصل جانشانی $f(\mathbb{N})$ یک مجموعه است که زیر مجموعه X است.

پس $f(\mathbb{N})$ باید دارای مینیمم باشد. فرض کنیم $f(t) = \min$ در $f(t+1) < f(t)$ در حالیکه $f(t+1) \in \mathbb{N}$. برعکس فرض کنید X خوش ترتیب نباشد. پس $A \subseteq X$ وجود دارد که $\min$ ندارد. پس $a_1 < a_2$ هست پس ...

اثبات فرمال عکس قضیه

G : انتخاب عنصر از زیر مجموعه های A

$$f: \mathbb{N} \rightarrow A$$

$H(x)$: عناصر کمتر از x
را بدهد.

$f_{(n+1)}$ = انتخاب یک عنصر
کمتر از $f_{(1)}, f_{(2)}, \dots, f_{(n)}$

$$f_{(n+1)} = G(H(f_{(n)}))$$

ما به دنبال تابع f بودیم.

حال اگر X خوش ترتیب نباشد دنباله نزدیکی پیدا می شود که این تناقض است.

به طور مشابه رابطه E روی X خوش بنیاد است
اگر دنباله $x_0 \exists x_1 \exists x_2 \exists \dots \in X$ پیدا نشود.

نظریه مجموعه ها

جلسه پانزدهم

قضیه:

فرض کنید یک تابع پرمش از X به Y وجود داشته باشد
در این صورت یک تابع ا-ا از Y به X وجود دارد.

اثبات

در نظر می گیریم:

$$\{A_t\}_{t \in Y}$$

$$A_t = \{x \in X \mid f(x) = t\}$$

کافیست یک تابع انتخاب از Y به $U A_t$ را
در نظر بگیریم.

تعریف

مجموعه های A_i را در نظر بگیرید که $|A_i| = k_i$
و A_i ها دو به دو مجزا باشند. تعریف کنید:

$$\sum_{i \in \lambda} k_i = \left| \bigcup_{i \in \lambda} A_i \right|$$

تمرین تعریف فوق خوش تعریف است.

(برای اثبات خوش تعریفی اصل انتخاب
لازم است)

$$A_i \sim A_i'$$

$$\bigcup A_i \sim \bigcup A_i'$$

توجه

$$\sum_{i \in \lambda} k_i = \lambda \cdot k$$

قضیه

$$\sum_{i \in \lambda} k_i = \lambda \cdot \sup_{i \in \lambda} k_i$$

اثبات

$$k = \sup_{i \in \lambda} k_i$$

$$\sum_{i \in \lambda} k_i \leq \sum_{i \in \lambda} k = \lambda k$$

$$\textcircled{1} \sum_{i \in \lambda} k_i \geq \sum_{i \in \lambda} 1 = \lambda$$

$$\forall i \in \lambda \quad \sum_{i \in \lambda} k_i \geq k_i$$

$\Downarrow$

$$\textcircled{2} \sum_{i \in \lambda} k_i \geq \sup_{i \in \lambda} k_i = k$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \Rightarrow \sum_{i \in \lambda} k_i \geq \lambda \cdot k$$

بنابراین حکم ثابت می شود.

$$\prod_{i \in \lambda} k_i \quad \text{تعریف}$$

مجموعه های A_i را در نظر بگیرید که $|A_i| = k_i$

$$\prod_{i \in \lambda} k_i := \left| \prod_{i \in \lambda} A_i \right|$$

توابع از λ به $U A_i$

$$f(i) \in A_i$$

توجه: اگر X_i ها نامتناهی باشند $\prod X_i$ نامتناهی است.
(چرا؟)
(اصل انتخاب)

اثبات باید یک تابع یک به یک از $\sum k_i$ به $\prod k_i$ پیدا کنیم.

$$x \in \bigcup A_i \mapsto (i, f) = \lambda \times \pi k_i = \pi k_i$$

$$f: \lambda \rightarrow \bigcup A_i$$

$$i \mapsto x$$

توجه: $\prod k_i$ خوش تکریم است (بنابراین اصل انتخاب)

تکریم $\prod k_i = k^\lambda$

از طرفی $\prod_{i \in \lambda} k_i > \lambda$ چون:

$$\prod k_i \geq \prod 2 = 2^\lambda > \lambda$$

(اصل انتخاب در اثبات به کار رفته)

قضیه $\prod k_i = \left(\sup_{i \in \lambda} k_i\right)^\lambda$

قضیه (کنیگ (König)

اثبات $K = \sup k_i$

اگر $\forall i, k_i < \lambda_i$ آنگاه:

$$\prod_{i \in \lambda} k_i < \prod_{i \in \lambda} \lambda_i = \lambda^\lambda$$

$$\sum_{i \in \lambda} k_i < \prod_{i \in \lambda} \lambda_i$$

اثبات این است: $K^\lambda \leq \prod_{i \in \lambda} k_i$

اثبات

فرض کنید از $\prod \lambda_i$ به $\sum k_i$ یک تابع پیدا باشد

$$\prod_{i \in \lambda} k_i = \prod_{i \in \lambda} \left(\bigcup_{j \in \lambda} \bigcap_{k \geq j} k_i \right) \geq K^\lambda$$

به عبارت دیگر فرض کنید $\prod \lambda_i$ برابر با اجتماع λ تا زیرمجموعه دو به دو مجزای خودش باشد.

$$\prod \lambda_i = \bigcup_{i \in \lambda} T_i$$

$$|T_i| = k_i$$

$$T_i \subseteq \prod \lambda_i$$

قرار دهید:

$Z_i =$ تصویر T_i روی λ_i در این (ادامه صند بعدی)

مشاهده

$$\sum_{i \in \lambda} k_i \leq \prod_{i \in \lambda} k_i$$

$$1 + 1 > 1 \cdot 1 \quad k_i \neq 1$$

ادعا عنصری در λ ها وجود دارد که در

$$UT_i \text{ نیست: } \lambda_1 - \varepsilon_1, \lambda_2 - \varepsilon_2, \lambda_3 - \varepsilon_3$$

$$(\textcircled{x}, \textcircled{x}, \textcircled{x}, \textcircled{x})$$

نتیجه $k < 2^k$

$$\underbrace{1+1+1+\dots}_k < \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \dots}_{2^k}$$

نتیجه $k < k^{cl(k)}$

$$k = \sum_{i < cl(k)} \textcircled{k_i} < \prod k$$

نتیجه $cl(2^{\lambda_\alpha}) > \lambda_\alpha$

$$\sum_{i < \lambda_\alpha} \textcircled{k_i} < \prod_{i < \lambda_\alpha} 2^{\lambda_\alpha} = 2^{\lambda_\alpha \times \lambda_\alpha} = 2^{\lambda_\alpha}$$

$\downarrow$
 $< 2^{\lambda_\alpha}$

نتیجه $cl(\lambda_\alpha^{\lambda_\beta}) > \lambda_\beta$

$$\sum_{i < \lambda_\beta} \textcircled{k_i} < \prod_{i < \lambda_\beta} \lambda_\alpha^{\lambda_\beta} = (\lambda_\alpha)^{\lambda_\beta \times \lambda_\beta} = \lambda_\alpha^{\lambda_\beta}$$

$\downarrow$
 $< \lambda_\alpha^{\lambda_\beta}$

$$\kappa^\lambda = ?$$

فرض کنید $\text{cf}(\kappa) < \lambda < \kappa$

$$\kappa < \kappa^{\text{cf}(\kappa)}$$

$$\kappa < (\kappa^{\text{cf}(\kappa)})^\lambda = \kappa^\lambda$$

با فرض GCH:

$$\kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^\kappa$$

κ^λ یک کاردینال بین κ و 2^κ است.

$$\text{GCH} \Rightarrow \kappa^\lambda = \kappa^+ = 2^\kappa$$

با فرض

$$\kappa^\lambda = ?$$

$$\text{ادعا: } \kappa^\lambda = \kappa \quad (\text{فرض: GCH})$$

$$\kappa \leq \kappa^\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} \kappa^\alpha \leq \bigcup_{\alpha < \lambda} 2^{\alpha \cdot \lambda}$$

$$\leq \bigcup_{\alpha < \lambda} 2^{\kappa \cdot \kappa} = \bigcup_{\alpha < \lambda} 2^\kappa$$

$$\Rightarrow \boxed{\kappa^\lambda = \kappa}$$

قضیه کلی: (در غیاب GCH)

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & \text{if } \lambda < \kappa \\ \kappa & \text{if } \text{cf}(\mu) < \lambda < \mu \end{cases}$$

نظریه مجموعه ها

جلسه شانزدهم

$\beth$ (Beth)

$$\beth_0 = \aleph_0$$

$$\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$$

$$\beth_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beth_\beta$$

λ

$$\lambda(\alpha) = \alpha^{\text{cf}(\alpha)}$$

فرضیه پوینسکی تقسیم یافته (GCH):

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

GCH با نظریه مجموعه ها سازگار است.

حاسبه توان کاردینال ها

با فرض GCH توان کاردینال ها به صورت زیر

حاسبه می شود:

$$\kappa^\lambda = ?$$

با فرض $2 \leq \kappa < \lambda$

$$2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa \cdot \lambda} = 2^\lambda$$

$$\kappa^\lambda = 2^\lambda \stackrel{\text{GCH}}{=} \lambda^+$$

مساحده

فرض کنید $\lambda < k$

تعداد زیر مجموعه های λ عضوی از مجموعه K عضو چقدر است؟

فرض کنید $|A| = k > \lambda$

$$[A]^\lambda = \text{زیر مجموعه های } \lambda \text{ عضوی } A$$

اثبات

$$|K|^\lambda \leq |[A]^\lambda|$$

هر تابع از λ به K یک زیر مجموعه از K است

با اندازه λ است. پس هر تابع از λ به K

یک زیر مجموعه λ عضوی از یک مجموعه K عضوی را مشخص می کند.

برعکس فرض کنید $B \subseteq A$ یک زیر مجموعه λ عضوی باشد. $(a_\alpha)_{\alpha \in \lambda}$

تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$i \in \lambda \mapsto a_{\alpha_i}$$

اصل انتظام (regularity)

اصل انتظام با بقیه اصول سازگار است.

صورت اصل: هر مجموعه ای نسبت به رابطه تعلق دارای

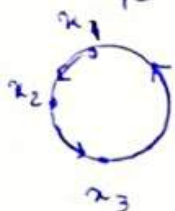
$$\forall S \neq \emptyset \exists x \in S \text{ such that } x \cap S = \emptyset$$

نتیجه

در جهان V دنباله هایی به صورت زیر وجود ندارد:

$$x_1 \ni x_2 \ni x_3 \ni x_4 \ni \dots$$

نتیجه در مجموعه ها سیکل نداریم:



نتیجه $x \notin x$

اگر $x \in x$ آنگاه این دنباله پیدا می شود:

$$\dots \in x \in x \in x$$

قضیه فرض کنید S یک مجموعه دلخواه باشد. در این صورت یک مجموعه متکدی S شامل S وجود دارد. (کوچکترین مجموعه متکدی شامل S وجود دارد).

اثبات

$$S_0 = S$$

$$S_1 = \cup S_0$$

$\vdots$

$$S_{n+1} = \cup S_n$$

ادعا $\cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ متکدی است.

$$y \in x \in \cup S_n$$

$$y \in x \in S_i$$

$\Downarrow$

$$y \in S_{i+1}$$

$\Downarrow$

$$y \in \cup S_n$$

نتیجه هر کلاس C دارای یک عنصر میخالی است.

اثبات
فرض کنید $x \in C$

مجموعه $tr(x)$ را در نظر بگیرید.
برسته مفرد

فرض کنید y عنصر میخالی باشد.
نمی‌تواند در این صورت y عنصر میخالی برای C است.

تعریف

$V_0 = \emptyset$ Cumulative
 $V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$ hierarchy
of sets
 $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$ سلسله مراتب
مجموعه‌ها

تکرین هر V_α متقدی است.

قضیه $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ (از اصل انتظام نتیجه می‌شود)

اثبات فرض کنید $V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ ناتهی باشد.

یک کلاس است

$V = \bigcup_{\alpha \in Ord} V_\alpha$ دارای یک عنصر میخالی

به نام x است.

ادامه

بنابراین هر $y \in x$ در V_α است.

بنابراین اصل جانشینی $x \in V_{\alpha+1}$

که (توضیح دهید)

نتیجه هر مجموعه‌ای دارای مرتبه است.

اولین α که $x \in V_{\alpha+1}$

رتبه اردینال است.

نتیجه $\text{rank}(x)$

فرض کنید C یک کلاس باشد.

$\hat{C} = \{x \in C \mid \forall y \in C \text{ rank}(x) \leq \text{rank}(y)\}$

مناقصی در C کمترین (حدائق) مرتبه را دارند.

مفروضه $\hat{C}$ یک مجموعه است.

$\hat{C} \subseteq V_\alpha$

فرض کنید C یک کلاس است و $\equiv$ یک رابطه هم‌ارزی روی C است.

$[\hat{x}] = \{y \in C \mid y \equiv x\}$

همه مجموعه‌ها

نظریه مجموعه ها

جلسه هفدهم

(استرای E)

قضیه فرض کنید T یک کلاس متناهی (محدود) باشد. فرض کنید ϕ یک دیرری باشد به طوری که $\phi(\phi)$ و اگر برای $x \in Z$ داشته باشیم $\phi(x)$ آنگاه داشته باشیم $\phi(z)$ در این صورت $\forall z \in T \phi(z)$

اثبات

$$A = \{z \in T \mid \text{حکم برای آنها درست است}\}$$

فرض کنید $\phi \notin A$ در این صورت A دارای یک عنصر مینیمال به نام z است. بنابراین برای هر $x \in Z$ حکم ϕ برقرار است. پس $\phi(z)$ هم برقرار است که این تناقض است. (توضیح دهید متدی بودن کجا به کار رفته)

قضیه (بازگشت E)

فرض کنید $G: V \rightarrow V$ یک تابع باشد. در این صورت $\exists f: T \rightarrow V$ داریم که f یک کلاس متناهی

$$f(x) = G(f|_x)$$

مثال (از بازگشت)

فرض کنید A یک کلاس باشد. در این صورت یک کلاس B وجود دارد به طوری که $B = \{x \in A \mid x \subseteq B\}$ (یکتاست).

توضیح

x زمانی در B است که اولاً در A است و $\forall y \in x \ y \in A \wedge y \subseteq B$

$$x \in B \text{ hereditary in } A$$

اثبات

$$F(z) = \begin{cases} 1 & z \in A \wedge \forall x \in z \ F(x) = 1 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$B = \{z \mid F(z) = 1\}$$

چرا F وجود دارد؟

$$G(w) = ?$$

$$\text{if } w \subseteq \{1\} \ G(w) = 1$$

$\Downarrow$

$$f(z) = G(f|_z)$$

* چرا این اثبات را نوشتم؟

$$B = \{x \in A \mid x \subseteq B\}$$

در اینجا از خود B استفاده شده

کلا دمنی از آن نداریم $\rightarrow$ مجموعه ای که مجموعه دانیست $\{x \mid \varphi(x, p_1, \dots, p_n)\}$ پس نیاز به مجموعه داریم

اثبات بودو آن f خودش از جملات مرتبه اول نوشته شده و در واقع از یک فرمول درست می آید.

رابطه های خوش بنیاد

فرض کنید P یک کلاس باشد. رابطه E

روی P را یک رابطه خوش بنیاد گوئیم هرگاه:

① هر مجموعه $\kappa \in P$ نسبت به E دارای عنصر

مینیمال است.

② برای هر $\kappa \in P$ ، $\{y \in P \mid y E \kappa\}$

مجموعه باشد.

تعریف $ext(\kappa) = \{y \in P \mid y E \kappa\}$

لیم فرض کنید P یک کلاس خوش بنیاد باشد.

در این صورت هر $C \subseteq P$ هم دارای عنصر

مینیمال است.

اثبات (تقرین)

قضیه (استقرای خوش بنیاد)

فرض کنید E یک رابطه خوش بنیاد روی کلاس P

باشد و ϕ یک دیرگی باشد به طوری که:

① برای اعضای مینیمال P ، ϕ برقرار باشد

② هرگاه $\phi(x)$ برای هر $x \in Z$ آنگاه $\phi(x)$

(هرگاه برای هر $x \in ext(z)$ داشته باشیم $\phi(x)$ ،

آنگاه $\phi(z)$)

در این صورت برای هر $z \in P$ داریم $\phi(z)$

قضیه (بازگشت خوش بنیاد)

$$F(x) = G(\kappa, F|_{ext(x)})$$

تقرین رابطه خوش بنیاد E را

گسترشی (extensional) می نامیم هرگاه:

$$x \neq y \Rightarrow ext(x) \neq ext(y)$$

قضیه (Mostowski's Collapsing Theorem)

فرض کنید E یک رابطه خوش بنیاد گسترشی روی P

باشد. در این صورت یک کلاس ترانزیتیو C وجود دارد

که: $(C, E) \cong (P, E)$

اثبات

$$\Pi(x) = \{\pi(z) \mid z \in x\}$$

$$C = \text{range } \Pi$$

توضیح

$$\Pi: P \rightarrow V$$

$$\Pi(x) \in G(\Pi|_{ext(x)})$$

قرار دهید

$$C = \text{range } \Pi$$

① C متکدی است.

$$z \in y \in C$$

فرض کنید $y \in C$ پس $y = \Pi(x)$

$$\{\pi(z) \mid z \in x\}$$

هر عنصر y در برد Π است یعنی در کلاس C است.

(ادامه صفحه بعدی)

(2) یک به یک بودن:

فرض کنید

$$\begin{cases} \pi(x) = \pi(y) \\ x \neq y \end{cases}$$

$\pi(x) = \pi(y)$ حاصل درجه را داسر باشد

$$x \neq y \Rightarrow \text{ext}(x) \neq \text{ext}(y)$$

در نظر بگیرید $u \in \text{ext}(x)$, $u \notin \text{ext}(y)$

$$\begin{array}{ccc} \psi = \pi(u) = \pi(t) & & \\ \psi \in \pi(x) & \downarrow & t \in y \end{array}$$

در یک درجه پایین تر $\pi(u) = \pi(t)$ رخ داد که این تناقض است.

حال:

$$z \in x \longrightarrow \pi(z) \in \pi(x)$$

پس E به E می رود.

نمایش مجموعه ها

جمله هجدهم

تفسیر اگر انتظام ZF سازگار باشد، آن گاه ZF سازگار است.

تعریف فرض کنید M یک کلاس باشد، E یک رابطه دوتایی روی M باشد.

فرض کنید $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ یک فرمول باشد.

هدف تعریف

$$M, E \\ \varphi(x_1, \dots, x_n) \\ (\text{relativization})$$

با استرا

$$\begin{aligned} - x \in y & \stackrel{M, E}{=} (x \in y) \quad \text{تفسیر } M \text{ از } x \in y \\ - x = y & \stackrel{M, E}{=} x = y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \text{اگر } \varphi \text{ را بدین گونه آن گاه:} \\ (\neg \varphi) & \stackrel{M, E}{=} \sim \varphi \end{aligned}$$

$$-(\varphi \wedge \psi) \stackrel{M, E}{=} \varphi \stackrel{M, E}{\wedge} \psi \stackrel{M, E}{\wedge} \psi$$

$$-(\exists x \varphi) \stackrel{M, E}{=} \exists x \in M \varphi \stackrel{M, E}{\wedge} \varphi$$

فرض کنید $a_1, \dots, a_n \in M$

$$\varphi \stackrel{M, E}{(a_1, \dots, a_n)}$$

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

مثال (وقتی $a, b \in M$)

$$M \models a \in b$$

$$a \in b \quad \text{درگاه}$$

تعریف (فرمول های Δ_0)

① فرمول های بدون سور Δ_0 هستند.

② اگر φ, ψ فرمول های Δ_0 باشند،

$(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), \neg \varphi, \neg \psi$ نیز Δ_0 هستند.

③ اگر φ یک فرمول Δ_0 باشد، آن گاه:

$$\varphi \quad \exists x \in y \quad \text{یک فرمول } \Delta_0 \text{ است.}$$

سوال این که « x یک اعدادی است» با یک فرمول Δ_0 نوشته می شود:

- x عددی است:

$$\forall z \in x (\forall y \in z \ y \in x)$$

تعریف « x عدد طبیعی است» یک فرمول Δ_0 است.

تعریف ۲ « x مجموعه اعداد طبیعی است» یک فرمول Δ_0 است.

لم فرض کنید (M, E) یک کلاس عددی باشد. فرض کنید

φ یک فرمول Δ_0 باشد، $x_1, \dots, x_n \in M$ در این صورت:

$$\varphi \stackrel{M, E}{(x_1, \dots, x_n)} \leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

(اصطلاحاً گویند فرمول φ برای M صادق (absolute) است)

اثبات فرض کنید حکم برای φ برقرار است.

$$M \models \exists x \in b \ \varphi(x, b)$$

$$M \models \varphi(c, b) \Rightarrow \varphi(c, b) \Rightarrow \exists c \in b \ \varphi(c, b)$$

طرف دیگر: $\exists x \in b \ \varphi(x, b)$

از آنجا که M عددی است $c \in M$ $\leftarrow c \in b \ \varphi(c, b)$ در M است.

$$M \models \varphi(c, b)$$

$$M \models \exists x \in b \ \varphi(x, b)$$

فرضیه اصل انتظام با بقیه اصول سازگار است.

اثبات

$$V' = \bigcup_{\alpha \in \text{ord}} V_\alpha$$
 یک مدل متناهی

ادعا $V' \models ZF$
 بقیه + انتظام

اصول نظریه مجموعه‌ها را بدون انتظام در نظر می‌گیریم. V_α ها را تشکیل می‌دهیم. ادعا می‌کنیم اجتماع این‌ها مدلی برای ZF است.

- اصل گسترش:

$$a, b \in V'$$

$$V' \models ((\forall x \in a \ x \in b) \wedge (\forall x \in b \ x \in a) \rightarrow a=b)$$

- اصل زوج سازی:

$$\begin{aligned} a, b &\in V' \\ \Downarrow \\ a, b &\in V_\alpha \end{aligned}$$

$$\{a, b\} \in V_{\alpha+1} \Rightarrow \{a, b\} \in V'$$

- اصل تمیزیح

$$a \in V'$$

$$\{x \in a \mid \varphi^V(x)\}$$

$$\gamma \subseteq a \in V_\alpha$$

$$\gamma \in V_{\alpha+1} \Rightarrow \gamma \in V'$$

- اصل مجموعه توانی:

$$a \in V' \Rightarrow a \in V_\alpha$$

$$x \in V_{\alpha+1} \text{ آنگاه } x \subseteq a$$

$$p(a) \in V_{\alpha+2}$$

$$p(a) \in V_{\alpha+2} \text{ در نتیجه } b \in V_{\alpha+1} \text{ آن } b \subseteq a$$

نظریه مجموعه ها

جلسه نوزدهم

هر کدام از $f(t)$ ها در V_β قرار می گیرند.

$$\{f(t) \mid t \in \alpha\} \subseteq \bigcup V_\beta$$

اما باید ببینیم در V_β قرار می گیرد یا
کل V_β نمی شود.

$$\{f(t) \mid t \in \alpha\} \subseteq \bigcup V_\beta \subseteq V_{V_\beta}$$

حال باید ببینیم که $f(x)$ از نظر V' هم
همان $f(x)$ است. باید ثابت کنیم:

$$V' \models \forall y \in z \exists t \in x \ y = f(t)$$

- اصل وجود مجموعه ناستانه

$$w \in V'$$

باید ثابت کنیم که w در V' هم
استرایی است.

(تمرین از گذشته: $\alpha \in V_\alpha$)

- اصل انتظام:

$$V_\alpha \models \exists y \in x \ y \cap x = \emptyset$$

فرض کنید $\alpha \in V'$

یک عنصر $y \in x$ را با حداقل مرتبه در نظر بگیرید

$$y \cap x = \emptyset \text{ ادعا}$$

اصل انتظام با بقیه اصول سازگار است.

(اگر عدلی برای بقیه اصول وجود داشته باشد،

عدلی برای بقیه اصول + انتظام نیز وجود دارد).

- اصل اجتماع:

فرض کنید $a \in V' = \bigcup V_\alpha$

سوال آیا $Ua \in \bigcup V_\alpha$ ؟

فرض کنید $a \in V_\alpha$. سوال: $Ua \in ?$

جواب $Ua \in V_\alpha$ (چون V_α متعدي است)

همچنین باید ثابت کنیم:

$$\exists b \in V' \quad V' \models b = Ua$$

① مجموعه ای که از نظر V ، Ua است

در V' است.

② باید نشان دهیم این مجموعه از نظر V'

هم Ua است.

- اصل جانشینی:

$$V' \xrightarrow{F} V'$$

$$\alpha \in V_\alpha$$

$$F[\alpha] = \{f(t) \mid t \in \alpha\}$$

$$\cap V'$$

قضیه ناهمبستگی دوم گودل

اگر ZFC سازگار باشد (یعنی مدل داشته باشد)
آنگاه $ZFC \vdash \text{Con}(ZFC)$

هر اثبات دنباله‌ای متناهی از فرمول‌هاست
که آن را هم می‌توان گذراند.
 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$

سوال

مدلی برای ZFC وجود دارد؟
 $ZFC \models$

قضیه ناهمبستگی

در صورتی که اصول موضوعه با هم تناقضی ندهند،
مدلی برای آنها وجود دارد.

اثبات ناهمبستگی دوم گودل

همه فرمول‌های Σ_1 صغیره $\varphi(x)$ را لیست کنید.

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$

یکی از این فرمول‌ها، فرمول زیر است:
«اگر در فرمول φ_x عدد x را قرار دهیم
فرمول حاصل اثبات نمی‌شود».
س: فرمول ψ

ψ خودش یکی از اعضای لیست است.
مثلاً φ_k است.

$\varphi_k(k)$: اگر در فرمولی که شماره آن k است

k را قرار دهیم فرمول حاصل اثبات نمی‌شود.

در واقع $\varphi_k(k)$ می‌گوید من اثبات نمی‌شوم.

① اگر ZFC سازگار باشد، (در ZFC)

$ZFC \vdash \varphi_k(k)$

② در واقع:

$ZFC \vdash (\text{Con}(ZFC) \rightarrow \neg \text{proof}(\varphi_k(k)))$

* اگر $ZFC \vdash \text{Con}(ZFC)$ آنگاه

$ZFC \vdash \text{proof}(\varphi_k(k))$ که این تناقضی است.
 $\varphi_k(k)$

ZFC
 $\forall$
 φ_0
 φ_1
 φ_2
 $\vdots$

فرمول‌هایی که درباره آنها
بحث می‌کنیم کجا هستند؟

هر فرمول را که می‌کنیم بنابراین یک مجموعه می‌شود
و در $\forall$ قرار می‌گیرد.

$\neg ZFC \vdash x \neq x : \text{con}(ZFC)$

سوال: آیا این یک
فرمول است؟

پاسخ: بله

φ : هیچ اثباتی برای $x \neq x$ وجود ندارد.

(هیچ عدد طبیعی، که یک اثبات برای $x \neq x$ نیست.)

نظریه مجموعه‌ها

جلسه بیستم

$$|f(x)| \leq |x| < k$$

$$F[X] \in V_\alpha \quad (\text{زیرا } cf(k) = k) \\ \alpha < k$$

$$F[X] = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

بنابراین $F[X]$ یک مجموعه است

* اثبات ادعا:

$$x \in V_\alpha$$

$$|V_\alpha| < k \quad \text{فرض کنیم}$$

$$\text{در نتیجه } |V_{\alpha+1}| < k$$

$$|V_{\alpha+1}| \leq 2^{|V_\alpha|}$$

که طبق فرض کمتر از k است.

$$\text{برای } V_\beta = \bigcup V_\alpha \text{ ثابت کنید و بگویید چرا}$$

$$V_k \models V_\beta$$

و چون $F[X]$ در V_β می‌باشد،
 $F[X]$ هم مجموعه است.

اصل موضوع جانشانی را ثابت کردیم. بنابر
اصول به سادگی نتیجه می‌شوند

نکته: از نظر V_k ، خودش مجموعه نیست!

کاردهای دست نیافتنی

k کاردهای حدی

$$cf(k) = k$$

کاردهای دست نیافتنی

$$2^\alpha < k \quad \forall \alpha < k \quad + \text{ موارد دیگر}$$

که کاردهای

قصد

فرض کنید k یک کاردهای دست نیافتنی باشد.

$$V_k \models ZFC$$

اثبات (اصل موضوع جانشانی)

فرض کنید $F: V_k \rightarrow V_k$ یک تابع تعریف پذیر باشد
و $x \in V_k$

ادعا: $F[X]$ مجموعه است

توجه: $|X| < k$ (تمرین)

با استرادی اندازه X

$$x \in V_k$$

$$x \in V_k = \bigcup V_\alpha$$

$$x \in V_\alpha \quad |x| < k$$

قضیه قبل

اگر K دست یافتنی باشد، $V_K \models ZFC$

نتیجه

$ZFC \nVdash I$ (بد کاردینال دست یافتنی وجود دارد)

یعنی $ZFC + \neg I$ سازگار است. (**)

اگر در ZFC هیچ کاردینال دست یافتنی

وجود نداشته باشد، یعنی $ZFC + \neg I$

سازگار است اما اگر بد کاردینال دست یافتنی

به نام κ وجود داشته باشد در این صورت

$V_{\kappa} \models ZFC +$ دست یافتنی وجود ندارد

($\kappa =$ کوچکترین کاردینال دست یافتنی)

V_K از نظر K

کلاس Ord است.

*** به شرط سازگاری ZFC

قضیه

اگر ZFC سازگار باشد، $ZFC \nVdash$ سازگار است. $ZFC \cup I$

اثبات

فرض کنید:

$ZFC \vdash Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC \cup I)$

در این صورت اگر

سازگار باشد،

آن ماه:

$ZFC \cup I \vdash Con(ZFC)$

در طبق فرض:

$Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC \cup I)$

خواهیم داشت که $ZFC \cup I$

در این یعنی

$ZFC \cup I \vdash Con(ZFC \cup I)$

که این به علت ناقصیت غیر ممکن است.

و بد فرضیه باشد

لح فرض کنید M بد مجموعه باشد. در این صورت

بد مجموعه $M' \ni M$ که $M \subseteq M'$ وجود دارد که

$\exists \bar{a} \in M' \forall x \in M (\varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \exists x \in M' \varphi(x, \bar{a}))$

برای هر $\bar{a} \in M'$ ∇ اینارو میله

اثبات

$\bar{a} \in M$

$\{x \mid \varphi(x, \bar{a})\}$

در نظر بگیرید:

$A = \{x \mid \varphi(x, \bar{a}) \wedge x \text{ حداقل در } M \text{ را دارد باشد}\}$

$\bar{a} \xrightarrow{H} A$

$M_1 = M \cup \{H(\bar{a})\}_{\bar{a} \in M}$

$M_2 = M_1 \cup \{H(\bar{a})\}_{\bar{a} \in M_1}$

$\vdots$

$M' = \bigcup_{new} M_n$ در بد قرار دهید:

(هندی)

$$\bar{a} \in M_k \leftarrow \bar{a} \in M'$$

$$\exists x \varphi(x, \bar{a}) \rightarrow$$

$$\exists x \in M_{k+1} \varphi(x, \bar{a})$$

$$\rightarrow \exists x \in M' \varphi(x, \bar{a})$$

توضیح ۱ همین قسمة را می توان برای φ_k تا φ_n انجام داد.

توضیح ۲ اگر اصل انتخاب را داشته باشیم،

M' می تواند سایر کوچکی داشته باشد:

$$M' = |M| + \aleph_0$$

اصل انتخاب در انتخاب x های که

$\varphi(x, \bar{a})$ استفاده می شود. یکی را

انتخاب می کنیم.

قسمة بازتاب (reflection principle)

فرض کنید $\varphi(x)$ یک فرمول باشد. برای هر

$M_0 \subset M$ یک مجموعه M_0 که $M_0 \subset M$

وجود دارد به طوری که

$$\varphi(\bar{a}) \leftrightarrow \varphi^M(\bar{a})$$

برای $\bar{a} \in M_0$

نتیجه مجموعه ها

جمله بیست و یکم

نتیجه قضیه جمله قبل

فرض کنید M' مدل بالا باشد

$$\exists x \varphi(x, \bar{a}) \rightarrow \exists x \in M' (\varphi(x, \bar{a}))$$

در این صورت M' فرمول φ را بازتاب می دهد:

$$\varphi(t) \leftrightarrow M' \models \varphi(t)$$

اثبات با استقرا روی پیچیدگی φ

(برای فرمول ساده φ , φ, ψ , $\varphi \wedge \psi$, ...
اثبات ساده است)

فرض کنید فرمول φ به صورت $\exists x \psi(x, \bar{a})$ باشد و بدانیم M' را بازتاب می دهد.

فرض استقرا حکم برای فرمول ψ برقرار است

$$\begin{aligned} \exists x \psi(x, \bar{a}) &\rightarrow \exists x \in M' \psi(x, \bar{a}) \\ &\rightarrow \exists x \in M' \psi^{M'}(x, \bar{a}) \\ &\rightarrow M' \models \exists x \psi(x, \bar{a}) \end{aligned}$$

قضیه فرض کنید $\varphi(x, \bar{a})$ یک فرمول دلخواه باشد.
در این صورت مدلی مانند M وجود دارد که φ را بازتاب می دهد. یعنی:

$$\varphi(\bar{a}) \leftrightarrow \varphi^{M'}(\bar{a})$$

اثبات فرمول φ دارای n سری زیرفرمول است.

$$\exists x \exists y (\underbrace{x \in y}_{\text{زیر فرمول}} \wedge \underbrace{y \in z}_{\text{زیر فرمول}})$$

فرض کنید زیرفرمول های φ به صورت

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$$

باشند. قضیه قبل را برای هر φ_i استفاده کنید.

$$\exists x \varphi_i \rightarrow \exists x \in M \varphi_i$$

برای φ_i ها همینان

ادعا M فرمول φ را بازتاب می دهد.

اثبات ادعا M یک φ_i ها را بازتاب می دهد.

(تردید در اثبات. فعلاً بدون اثبات می پذیریم)

نتیجه هر فرمولی در V_α (خوب) بازتاب پیدا می کند.

سازگاری GCH

$$\begin{cases} V_0 = \emptyset \\ V_{\alpha+1} = P(V_\alpha) \\ V_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} V_\beta \end{cases}$$

$$V' = \bigcup V_\alpha$$

$$V' \models ZF$$

اصل انتظام می لغت $V' = V$

سلسله مراتب ساختی مجموعه ها

$$\begin{cases} L_0 = \emptyset \\ L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha) \\ L_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} L_\beta \end{cases}$$

زیرمجموعه های L_α به ترتیب پذیر L_α

زیر مجموعه تکرین پذیر α از M :

$$X \subseteq M$$

$$X = \{ \bar{a} \mid M \models \varphi(\bar{a}, \bar{b}) \}$$

$\bar{b} \in M \leftarrow$ ثابت

توجه: قضیه قبلی در مورد L هم برقرار است.
(هر فرمول در L_α بازتاب پیدا می کند)

$$\text{توجه: } L \models ZF \text{ (شبه } V \text{)}$$

$$\text{سخت تر: } L \models ZF + "V=L"$$

L نه تنها مدل ZF است،
مدل " $V=L$ " هم هست.

$$\text{قضیه: } ZF + "V=L" \vdash GCH$$

نتیجه: اگر ZF سازگار باشد، $ZF + GCH$ هم سازگار است.*

تکرار مطالب

اگر نظریه مجموعه ها مدل داشته باشد، V در داخل V یک f هست

$$L \models ZF + "V=L"$$

سوال آیا " $V=L$ " ZF سازگار است؟

$$\text{اگر } ZF \text{ سازگار باشد: } L \models ZF + "V=L"$$

* فرض کنید ZF سازگار باشد

ZF یک مدل به نام V دارد

در V یک L داریم که " $V=L$ " $L \models ZF +$

در جهان هایی که " $V=L$ " است GCH برقرار است.
پس در L هم GCH هم برقرار است.

اثبات **

$$\text{توجه: } |L_\alpha| = |\alpha| \text{ (تقریبی)}$$

فرمول ψ را در نظر بگیرید که:

$$\psi: \forall x \exists y \exists z (y \in L_z \wedge x \in y)$$

این همان " $V=L$ " است.

قضیه قبل فرمول ψ خودش در یک L_α بازتاب دارد.

فرض کنید K یک کاردینال باشد $\alpha \leq K$ باشد.

L_α را به گونه ای بگیرید که نه تنها فرمول ψ را بازتاب دهد

بلکه $K \cup \{\alpha\} \subseteq L_\alpha$ (از چه فرض استفاده کردیم؟
از این فرض که " $V=L$ ")

یادآوری قضیه لونهایم - اسلوم

فرض کنیم $M \models T$ و $X \subseteq M$

در این صورت یک زیرمدل کوچک از M برای T وجود دارد که اندازه X است.

حال یک زیرمدل $C \subseteq L_\alpha$ که $a \in C$ و $K \subseteq C$ که

$|C| = K$ ، توجه کنید که C همه دیگری های L_α را دارد.
اصل معادلت $C \models \psi$

بنابراین فرد زیرش " D, E " $C \models$

مدل متدی

(صنعتی)

$$|D| = k$$

$$k \subseteq D$$

$$a \in D$$

تمام زیر مجموعه های L_β قرار دارد. $k \subseteq L_{k^+}$ هستند

$$a \in L_{k^+} \text{ پس } |L_\beta| \leq k$$

خلاصه فرض کنید k یک کاردنال باشد و

$$a \in L_{k^+}, a \leq k \text{ در این صورت}$$

تمام زیر مجموعه های k در یک مجموعه با اندازه k^+ هستند. پس برای k پیوسته، برتراری باشد.

(رجوع شود به جزوه خانی - زارعی)

نظریه مجموعه ها

جلسه بیست و دوم

یادآوری

اگر ZF بدون اصل انتظام سازگار باشد،
آنگاه ZF سازگار است.

لم فرض کنید $\varphi(x, \bar{u})$ یک فرمول باشد. در
این صورت یک مجموعه M وجود دارد به طوری که
(برای $\bar{u} \in M$)

$$* \quad (\exists x \varphi(x, \bar{u}) \rightarrow \exists x \in M \varphi(x, \bar{u}))$$

قضیه فرض کنید $\varphi(x, \bar{u})$ یک فرمول باشد.
در این صورت یک مجموعه M وجود دارد که
 φ را بازتاب می دهد.
(در واقع این فرمول در $\bar{u}$ بازتاب
داده می شود)

نکته این قضیه برای φ_1 تا φ_n هم درست است.

اثبات فرض کنید φ فرمول مورد نظر باشد.

فرض کنید $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ تمام زیر فرمول های
 φ باشند. بنا به لم قبل یک مجموعه M وجود
دارد که $*$ برای φ ها در آن اتفاق می افتد.

ادعا M تمام φ ها را بازتاب می دهد.
(M, φ را بازتاب می دهد.)

اثبات با استقرا (روی پیچیدی فرمول ها)

فرمول های پایه در هر مدلی بازتاب پیدا می کنند. حال

فرض کنید حکم برای φ درست باشد. می خواهیم

نشان دهیم $\exists x \varphi$ درست است. در این صورت:

$$\forall F \quad (\exists x \varphi(x, \bar{a})) \leftrightarrow$$

$$\exists x \in M \varphi(x, \bar{a}) \leftrightarrow \underbrace{\exists x \in M \varphi(x, \bar{a})}_{\text{به خاطر فرض}}$$

$$\leftrightarrow \underbrace{(\exists x \varphi)}_{\text{در } M \text{ بازتاب پیدا کرده}}$$

در M بازتاب
پیدا کرده

به خاطر فرض
استقرا φ بازتاب
پیدا کرده

قضیه فشرده

اگر T یک سری اصول موضوعه باشد.

فرض کنید هر تعداد متناهی از این اصول موضوعه با هم
سازگار باشند:

$$\forall \Delta \subseteq T \quad \exists M_\Delta \models \Delta$$

متناهی

در این صورت

$$\exists M \quad M \models T$$

فرض کنید $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ جمله باشند.

$$ZFC \vdash \exists \alpha \quad \forall \alpha \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)$$

$\Downarrow$

$$! \quad ZFC \vdash \text{Con}(ZFC)$$

اثبات اول

اگر φ_1 تا φ_n اصول موضوعه باشند

$$ZFC \vdash \exists \forall \alpha \quad \forall \alpha \models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$$

اتفاق دوم

هر n تا جمله φ_n $ZFC \vdash$ در یک مدلی برقرارند

اتفاق اول رخ می دهد اما اتفاق دوم رخ نمی دهد.

عدد M مجموعه باشد.

تمام زیر مجموعه ها که تعریف پذیرند: $Def(M)$

$X \subseteq M$ را یک مجموعه تعریف پذیر می نامیم هرگاه

$$X = \{x \in M \mid \varphi(x, \bar{a})\}$$

$\bar{a} \in M$

سلسله مراتبی که تعریف کردیم: (ساختی)

$$L_0 = \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} = Def(L_\alpha)$$

$$L_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} L_\alpha$$

جمله " $V=L$ " می گوید:

(1) هر x در L_α است.

(2) جهان نظریه مجموعه ها ساختی است.

اگر " $V=L$ " را به عنوان اصل می پذیریم:

$$ZF + "V=L" \vdash GCH$$

نتیجه

اگر ZF سازگار باشد آنگاه $ZFU \vdash GCH$ هم سازگار است.

اثبات اگر ZF سازگار باشد $L \models ZF$

, $L \models V=L$ از طرفی $ZF + "V=L" \vdash GCH$

نتیجه

اگر ZF سازگار باشد ZFC سازگار است.

$$ZF + "V=L" \vdash AC$$

برای اثبات ادعا نشان می دهیم که بدون استفاده از اصل انتخاب روی L می توان یک ترتیب نهاد که با آن ترتیب L خوش ترتیب شود.

بدون استفاده از اصل انتخاب نشان دهیم که تعداد فرمول ها شماراست. (فرمول های بدون پارامتر)

روی مجموعه فرمول ها یک ترتیب را در نظر بگیرید.

زیر مجموعه ها که تعریف پذیرند $Def(M)$ ترتیب دارد

$$c \in Def(M) : \varphi(0,0) \quad \bar{a} \in M$$

$(\varphi, \bar{a})$ را مرتب کنید.

فرض کنید $c_1, c_2 \in Def(M)$

$c_1 < c_2 \iff$ c_2 را بتوان با کدهای c_1 کمتر که c_1 را تعریف می کند تعریف کرد.

با استرا هم I_α خوش ترتیب می شود.
 $(\alpha \mapsto \prec_\alpha)$

ردی I ترتیب زیر را تعریف کنید:

$$c_1 \prec c_2 \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 \prec_\alpha c_2 & \exists \alpha \\ & c_1, c_2 \in I_\alpha \\ c_2 \succ c_1 & c_1 \in I_\alpha \\ & c_2 \in I_\beta \\ & \beta \succ \alpha \end{cases}$$

نظریه مجموعه ها

جلسه بیست و دوم

یادآوری جلسه قبل

$$\forall \varphi$$

$$ZFC \vdash \forall' \models \varphi$$

,

$$ZFC \not\vdash \forall \varphi \quad \forall$$

تعریف

فرض کنید P یک ترتیب جزئی باشد.

مجموعه $G \subseteq P$ را یک فیلتری نامیم هرگاه:

① برای هر $q \in G$ اگر $p \in P$ از q بیشتر باشد آنگاه $p \in G$

② برای هر $p, q \in G$ یک عنصر $r \in G$ وجود دارد که $r \leq p, r \leq q$

③ $G \neq \emptyset$

تعریف

ساختار $(P, \leq)$ را یک مجموعه مرتب جزئی نامیم هرگاه:

$$\forall x \in P \quad x \leq x$$

$$\forall x, y, z \in P \quad (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$$

$$\forall x, y \in P \quad (x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow y = x)$$

توجه

① وقتی $q \leq p$ می نویسیم q قوی تر از p است

② فرض می کنیم یک عنصر مشخص $1 \in P$ وجود دارد که $1 = \max P$

($\mathbb{N}$ در $\mathbb{N}$) به درستی مورد $1_n = 0$ که ترتیب برعکس

تعریف مجموعه متعدی $\uparrow$ مرتب جزئی $P \in M$ فرض کنید M یک مدل باشد. فرض کنید $G \subseteq P$ یک فیلتر می نویسیم G یک فیلتر P - ترتیب نسبت به M است هرگاه G هر مجموعه DEM را که در P چقال است قطع کند:
 $\forall DEM \quad (D \text{ در } P \text{ چقال} \rightarrow D \cap G \neq \emptyset)$ باشد

توجه $D \subseteq P$ را چقال در P می نامیم هرگاه برای هر $p \in P$ یک $q \in D$ داشته باشیم که $q \leq p$

قضیه (Rasiowa-Sikorski) مجموعه مرتب جزئی

فرض کنید که M شمارا باشد و $p \in P$. در اینجا هر دو یک فیلتر P - ترتیب نسبت به M وجود دارد که شامل P است.

اثبات صفحه بعدی

اثبات

فرض کنید $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ سلسله‌ای از تمام مجموعه‌های متعلق به M باشد که در P فعال هستند. یک دنباله به صورت زیر بسازید:

$$q_0 = P$$

$$q_{n+1} \leq q_n$$

$$q_{n+1} \in D_n$$

قرار دهید:

$$G = \text{فیلتر تولید شده توسط } q_i \text{ ها}$$

در این صورت G یک فیلتر P -رئز باشد و M است.

در دایره فیلتر ما $\{q_n \mid \exists m \ q \geq q_m\}$ می‌باشد.

توجه: وقتی حرف از مدل می‌زنیم، منظورمان مدل partial است. لزوماً همه اصول را در آن نداریم.

تعیین فرض کنید M یک ctm باشد. اصل تصحیح در آن برقرار است. فرض کنید P یک مجموعه مدب جزئی با دیرری زیر باشد:

$$\forall p \in P \ \exists q, r \in P \quad q \perp r \\ q \leq p \\ r \leq p$$

تعریف

q و r از هم مستقل هستند $(q \perp r)$ غیر قابل مقایسه

$$\text{هرگاه } \exists s \ (s \leq r \wedge s \leq q)$$

ادامه صورت تعریف

فرض کنید فیلتر G روی M ، P -رئز باشد در این صورت $G \not\perp M$

اثبات

اگر G ، رئز باشد باید همه زیرمجموعه‌های فعال در P در M را قطع کند.

ادعا $P-G$ در P فعال است. (واضح است که G با $P-G$ اشتراک ندارد)

$$P-G \in M \quad (1)$$

$$P-G \text{ در } P \text{ فعال است.} \quad (2)$$

فرض کنید $p \in P$. بنا به فرض دو عنصر $q, r \in P$ وجود دارند که



ادعا قطعاً یکی از q و r متعلق به $P-G$ است.

چون اگر هر دو q و r در G باشند بنا به

تعریف فیلتر عنصری مانند $q \wedge r$ پیدا می‌شود.

(مهند پوری)

ادعای دوم اگر $G \in M$ آن گاه $P-G \in M$

□

تعریف (مجموعه P -نام‌ها)

τ یک P -نام است هرگاه هر عنصر متعلق به τ
به صورت $\langle \sigma, p \rangle$ باشد که σ یک P -نام است
و $p \in P$.

سوال چرا تعریف بالا خوش‌تعریف است؟

مثالی از نام‌ها:

ϕ

$\{ \langle \phi, p \rangle \}$

$\{ \langle \phi, p_1 \rangle, \langle \phi, p_2 \rangle \}$

تعریف ① V^P کلاس تمام P -نام‌ها

$$M^P = V^P \cap M \quad \text{②}$$

(M^P = چیزهایی که از نظر M نام

هستند.)

نظریه مجموعه ها

جلسه بیست و چهارم

فرض کنید G یک فیلتر زنجری باشد.

$$G \subseteq P$$

قرار دهید $f = \bigcup G$
اجتماع دنباله های که
در P هستند.

منقول از یک دنباله یک تابع از n به $\{0,1\}$ است.

$$P: n \rightarrow \{0,1\}$$

توجه f یک تابع است.

ادعای اول دانشه f برابر W است.

اثبات

$$D_n = \{p \in P \mid n \in \text{Dom } p\}$$

D_n در P چگال است.

$$\text{Dom } f = \bigcup_{n \in \omega} D_n \neq \emptyset$$

توجه $UG = f$
در مدل M نیست!

توجه f را یک عدد حقیقی کوهن می نامیم.
cohen generic real

چرا f در M نیست؟

ادعا f با تمامی عناصر M متفاوت است.

فرض کنید $g \in M$. ادعای کنیم $f \neq g$

$$D_g = \{p \in P \mid p \neq g\}$$

D_g چگال است. پس $D_g \cap G \neq \emptyset$ (چون G زنجری است)

تقریب

فرض کنید $\tau \in V^P$, $G \in V \leftarrow$ مجموعه

$$\tau \restriction G = \{ \sigma_G \mid \exists p \in G \langle \sigma, p \rangle \in \tau \}$$

ارزش دهی نام τ با
استفاده از مجموعه G

تقریب

$$M[G] = \{ \tau_G \mid \tau \in M^P \}$$

ترابری
 $p \in M$
 $G \subseteq P$
قرار است
مدل جدید ساخته شده
توسط M باشد

تعریف $M[G]$ مدل ZFC است

- اوردینال های $M[G]$ همان اوردینال های V است.

مثال فرض کنید P مفهوم فرسید زیر باشد:

عناصر مجموعه P : دنباله های متناهی صفر و یک
(M مدل زمینه و $p \in M$)

بین دنباله های فوق ترتیب زیر را در نظر
بگیرید:

$$p \leq q \iff p \text{ شامل } q \text{ است}$$

$$01011 < 010$$

تعریف فورسیند

$$\varphi(x_1, \dots, x_n)$$

$$M \text{ ctm}$$

$$p \in M \quad p \in P$$

$$\tau_1, \dots, \tau_n \in M^P$$

$$p \Vdash_{P, M} \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \quad (p \text{ فرمول } \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n) \text{ را فورس می‌کند})$$

فورس می‌کند

$$\forall G (G \text{ generic } / M, p \wedge p \in G \rightarrow \varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G))$$

شرطه $M[G]$

برای فرسیند یک مفهوم $\Vdash^*$ لازم است (سمت درختیتر)

تفسیر اساسی فورسیند

$$\varphi((\tau_1)_G, \dots, (\tau_n)_G) \stackrel{M[G]}{\iff} \exists p \in G \quad p \Vdash \varphi(\tau_1, \dots, \tau_n)$$

لای تغییر موضوع

کل آنتاگردان

فرض کنید $\mathcal{W}$ گزیده‌ای از زیر مجموعه‌های یک مجموعه U باشد. می‌تویم $\mathcal{W}$ یک $\mathcal{S}$ -سیستم [یا مدل آنتاگردان] است هرگاه یک مجموعه $S \subseteq U$ وجود داشته باشد که

$$\forall A, B \in \mathcal{W} \quad A \cap B = S$$



توجه: اشتراک می‌تواند تهی باشد.

$$D_0 \cap G \neq \emptyset$$

$$\uparrow$$

$$f = UG$$

یعنی تابع f با U متفاوت است.

مثال فرض کنید M یک مدل زمینهای باشد.
ground model

P : دنباله‌های متناهی از اعدادهای شمار

$$p \in P \quad p = \langle \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle$$

↓
اعدادهای شمار

با همان روش قبلی این دنباله‌ها را مرتب کنید

فرض کنید G یک فیلتر ژنریک باشد. $f = UG$
Dom $f = \mathcal{W}$ (به همان روش قبلی)

$$\text{range } f = \mathcal{W}_1^M \quad \text{اردا}$$

برای هر $\alpha \in \mathcal{W}_1^M$ مجموعه

$$E_\alpha = \{p \in P \mid \alpha \in \text{range}(p)\}$$

در نظر بگیرید.

E_α در P فعال است.

$$G \cap E_\alpha \neq \emptyset$$

نتیجه برای هر $N \geq M[G]$ ، $\mathcal{W}_1^M$ شمار است.

$$f: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}_1^M$$

تصویر یک مجموعه شمار، شمار است.

فرودیندن یک

کار دنیال

$\mathcal{W}_1^M$ در N شمار است.

قضیه اردوس - رادو

برای هر $k > 0$ و $r > 0$

یک عدد $f(k, r)$ وجود دارد به طوری که هر سیستم
متشکل از مجموعه های k -عضوی، اگر بیش از $f(k, r)$
عضو داشته باشد، شامل یک r -تایی بردار با اندازه
 r است.

توجه: اردوس - رادو اینج را هم ثابت می کند:

$$f(k, r) \leq k! (r-1)^k$$

معادل قضیه اردوس - رادو (با شردی)

هر r -تایی شمارا از k -مجموعه ها
(مجموعه های k عضوی) شامل یک
 r -تایی بردار r شامل است.

قضیه (Shanin)

فرض کنید W یک r -تایی شمارا از مجموعه های
متناهی باشد. در این صورت W یک $Z \subseteq W$
شمارا وجود دارد که Δ -سیستم است.

اثبات W شماراست. پس شماراتا مجموعه در W
هم اندازه هستند. پس فرض کنیم شمارا مجموعه با اندازه
 n داریم.

استرا اگر $n=1$ ✓

فرض کنید حکم برای n درست باشد. حکم را برای
 $n+1$ ثابت می کنیم.

اگر عنصری مثل a وجود داشته باشد که در شماراتا
مجموعه X هست، حکم ثابت می شود.

$$\{X - \{a\} \mid X \in W\}$$

✓

بنابر فرض استرا
شامل r -تایی بردار
می باشد.

فرض کنید چنین a ای وجود نداشته باشد.
در این صورت یک Δ -سیستم شمارا با استرا r
ببازید.

$$(X_i)_{i \in \alpha}$$

X_α را به تونه ای بگیریم که با هیچ کدام از X_i ها
استرا نداشته باشد. (چگونه؟)

شماره مجموعه ها

$$P: w_2 \times w \rightarrow \{0,1\}$$

α

جمله بیت و پنجم

$$f_\alpha: w \rightarrow \{0,1\}$$

هدف در ادامه

$$f_\alpha(t) = f(\alpha, t)$$

ساختن یک مدل که در آن مجموعه اعداد حقیقی که در آن مجموعه اعداد حقیقی اندازه $\aleph_2$ دارند. یعنی:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2$$

$$(f_\alpha)_{\alpha \in w_2} \quad f_\alpha: w \rightarrow \{0,1\}$$

یعنی w_2^M عدد حقیقی و مجموعه پیدا شد.

$P =$ مجموعه تمام توابع متناهی که از $w_2 \times w$ به $\{0,1\}$ هستند.

باید ثابت کنیم:

$$p \in P \quad p: w_2 \times w \rightarrow \{0,1\}$$

ادعا f_α ها متفاوت اند.

$$p \neq q \Leftrightarrow p \neq q$$

$$\aleph_2 = |w_2^M| \quad \text{درما}$$

G generic

ادعا برای هر $\alpha, \beta \in w_2$ ، $f_\alpha \neq f_\beta$

$$f = UG$$

$$D = \{p \in P \mid p(\alpha, n) \neq p(\beta, n)\}$$

ادعا

D فعال است و چون G ، D را قطع می کند

① f یک تابع است.

نتیجه می گیریم $f_\alpha \neq f_\beta$

② $\text{Dom } f = w_2 \times w$

اثبات ادعای ۲

$$\aleph_2 = |w_2^M| \quad \text{ادعا} \quad \leftarrow \text{از نظر ما}$$

$$D_{\alpha, n} = \{p \mid (\alpha, n) \in \text{Dom } p\}$$

$D_{\alpha, n}$ در P فعال است.

فرض کنیم P یک مفهوم فورسیند باشد

G تمام $D_{\alpha, n}$ ها را قطع می کند.

ویرمی C.C.C دارد (یعنی تعداد عناصر قابل انطباق

در آن کمتر از M است) در این صورت $M[G]$

همین تمام (α, n) ها در دامنه هستند.

و M کاردینال های هم اندازه اند.

اثبات در فعال نمی گنجد

ادعا خورشید مطرح شده ویرنی C.C.C. را دارد.

$$p: w_2 \times w \rightarrow \{0, 1\}$$

اثبات فرض کنید F یک مجموعه نامتناهی از عناصر P باشد. ادعا عناصر F غیر قابل انطباق نیستند.

یادآوری هر مجموعه نامتناهی از مجموعه ها شامل یک Δ -سیستم نامتناهی است.

نامتناهی

$$W = \{ \text{dom } p \mid p \in F \}$$

یک Δ -سیستم $Z \subseteq W$ وجود دارد.

$$G = \{ f \in Z \mid \text{Dom } f \subseteq S \}$$



نامتناهی تابع روی این دامنه با هم برابرند.

چون بخشی از F غیر قابل انطباق نیست.

$$X_2 = |w_2^M|$$

$$\left. \begin{array}{l} ZFC + \sim CH \text{ سازگار است} \\ ZFC + CH \text{ سازگار است} \end{array} \right\}$$

تبدیل لنتیم با

GCH سازگار است.

تمام!