

$$f(x) = x^{y^{-1}(x)}$$

$$x > 0$$

-1

$$f'(x) = [x^{y^{-1}(x)}]' = [e^{y^{-1}(x) \ln x}]'$$

$$e^{y^{-1}(x) \ln x} = e^{y^{-1}(x) \ln x}$$

$$= [y^{-1}(x) \ln x]' \cdot e^{y^{-1}(x) \ln x}$$

$$= \left(\frac{1}{1+x^r} \ln x + \frac{y^{-1}(x)}{x} \right) x^{y^{-1}(x)}$$

مشتق

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1+r \ln x)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{1}{x-1} \ln(1+r \ln x)}$$

-2

روش ل'Hopital

$$e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \ln(1+r \ln x)}$$

2

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+r \ln x)}{x-1}$$

$$= (\ln(1+r \ln x))'(1)$$

$$= \frac{r}{1+r \ln x} \Big|_{x=1}$$

$$l = r$$

(*)

کافی است $l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \ln(1+r \ln x)$ می بینیم.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = (\ln)'(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = (\ln)'(1) = 1$$

می دانیم

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \ln(1+r \ln x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \frac{\ln(1+r \ln x)}{r \ln x} \cdot r \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+r \ln x)}{r \ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \Rightarrow l = r$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1+r \ln x)^{\frac{1}{x-1}} = e^r$$

در نتیجه

(1)

۳- نشان دهید f بر $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ اکثراً صعودی ، $f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)$ ،
 $(f^{-1})'(0) = ?$

راه حل اول.

$$f'(x) = \left(\frac{1+2x}{1-2x}\right)' \cdot \left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2(1-2x) + 2(1+2x)}{(1-2x)^2} \cdot \frac{1-2x}{1+2x}$$

۵

مشق و تمرین

$$f'(x) = \frac{4}{1-4x^2}$$

عبارت را ساده کنید

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))}$$

$$f(0) = \ln 1 = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} (f^{-1})'(0) &= \frac{1}{f'(0)} \end{aligned} \right.$$

۵

$$\Rightarrow (f^{-1})'(0) = \frac{1}{4}$$

راه حل دوم.

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+2x}{1-2x}\right) = \ln(1+2x) - \ln(1-2x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{1+2x} + \frac{2}{1-2x} = \frac{4}{1-4x^2}$$

ادامه مانند بالا ...

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(\sin^{-1} x)^r}{x} & x \in (-1, 1) \quad x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \in (-1, 1), x \neq 0$
 $x^r, x, \sin^{-1}$
 مشتق پذیر هستند

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{r \sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - (\sin^{-1} x)^r}{x^r}$$

$$f'(x) = \frac{\sin^{-1} x}{x^r} \left[\frac{rx - (\sin^{-1} x) \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right]$$

برای نقطه $x=0$
 مشتق را با استفاده
 از تعریف محاسبه می‌کنیم.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\sin^{-1} x)^r}{x}}{x}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin^{-1} x}{x} \right)^r = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^r = 1$$

$$\begin{aligned} \sin^{-1} x = t &\Rightarrow x = \sin t \\ x \rightarrow 0 &\Rightarrow t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

با استفاده از
 قضیه ل'Hopital

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{\sin^{-1} x}{x^r} \left[\frac{rx - (\sin^{-1} x) \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right] & x \in (-1, 1) \quad x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\forall x > 1 \quad \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x} \quad -5$$

راه حل اول.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \ln x \quad [1, x] \\ f \text{ روی } [1, x] \text{ شرایط قضیه مقدار میانگین} \\ \text{را دارد. (پسوند روی } [1, x] \text{ و} \\ \text{مشتق پذیر روی } (1, x)) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{قضیه} \\ \Rightarrow \\ \text{میانگین} \end{array} \quad \begin{array}{l} \exists c \in (1, x) : \\ f'(c) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln x}{x-1} \\ 1 < c < x &\Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x} \end{aligned}$$

راه حل دوم.

$$f(x) = x \ln x - x + 1$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x \\ x > 1 \Rightarrow \ln x > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(x) > 0$$

f ابتدا صعودی $\Rightarrow$ بنابر قضیه مقدار میانگین

$$\Rightarrow (x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1))$$

$$\Rightarrow (x > 1 \xrightarrow{f(1)=0} f(x) = x \ln x - x + 1 > 0)$$

$$\Rightarrow x \ln x > x - 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1} > \frac{1}{x}$$

(۴)

4- $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ ، استریم های مطلق در $[0, 2]$

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x-1)(x+3)e^x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x=1 \quad \text{و} \quad x=-3$$

توابع e^x ، $x^2 - 3$ همه مشتق پذیر هستند.

در نتیجه نقاط بحرانی f ، -3 و 1 هستند. اما نقطه -3 در بازه

$[0, 2]$ نیست. پس برای یافتن استریم های مطلق کافی است مقادیر

f در نقاط 0 ، 1 و 2 را مقایسه کنیم.

می داریم که $2 < e < 3$

$$f(0) = -3$$

$$f(1) = -2e$$

$$f(2) = e^2$$

$$f(1) < f(0) < f(2)$$

$$-2e < -3 < e^2$$

$f(1) = -2e$ مقدار می نیم مطلق و $f(2) = e^2$ مقدار ماکزیم مطلق تابع f است.