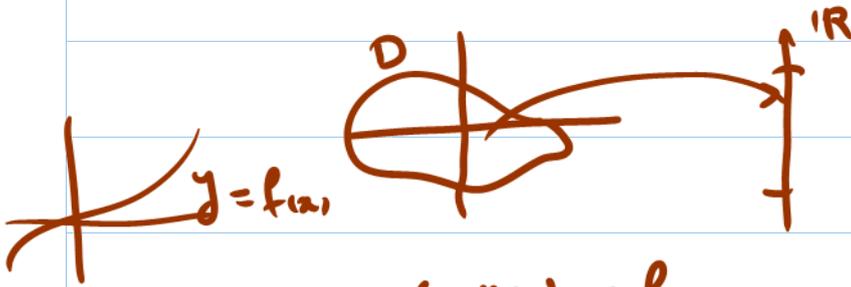


به نام خدا

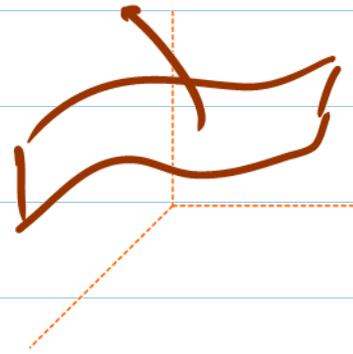
توابع دستگیره

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$



$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

$$z = f(x, y)$$

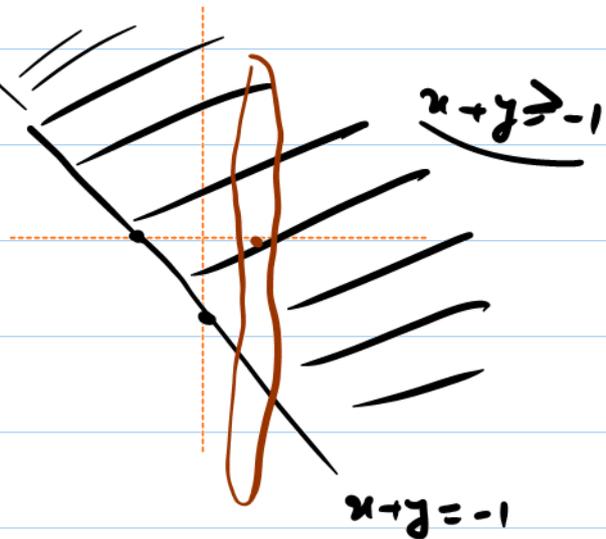


$$D = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y)\}$$

مثال  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$  سوال دامنه این تابع را رسم کنید

$$D_f = \{(x, y) \mid \begin{matrix} x+y+1 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{matrix}\}$$

$$x+y = -1$$



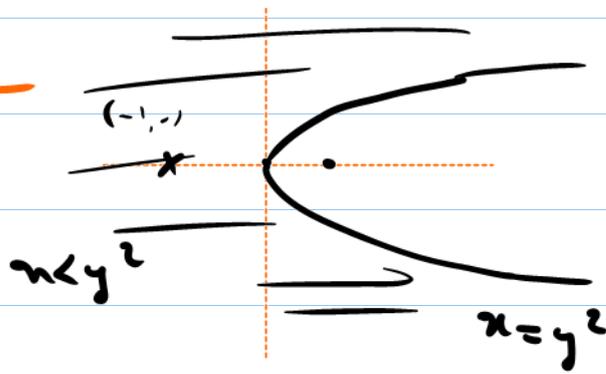
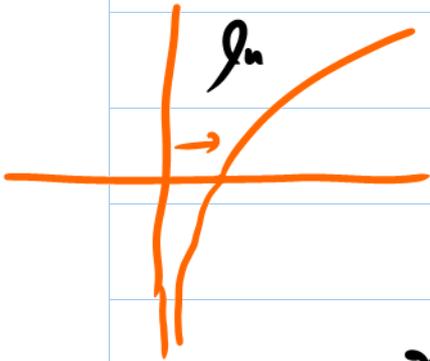
$$y^2 - x > 0$$

$$y^2 > x$$

مثال

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

$$D = \{(x, y) \mid y^2 > x\}$$



مثال • مثال و صورتابع را رسم کنید.

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

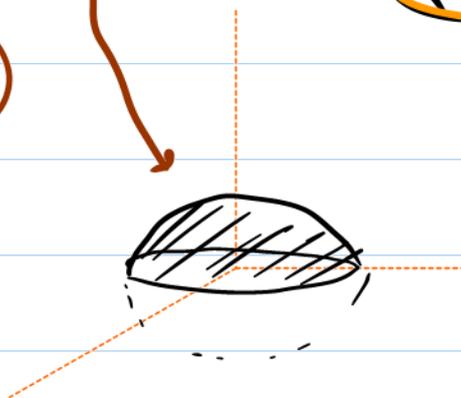
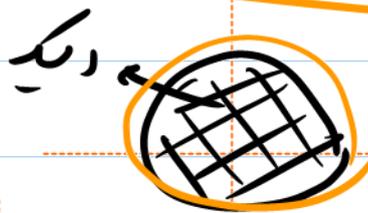
$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

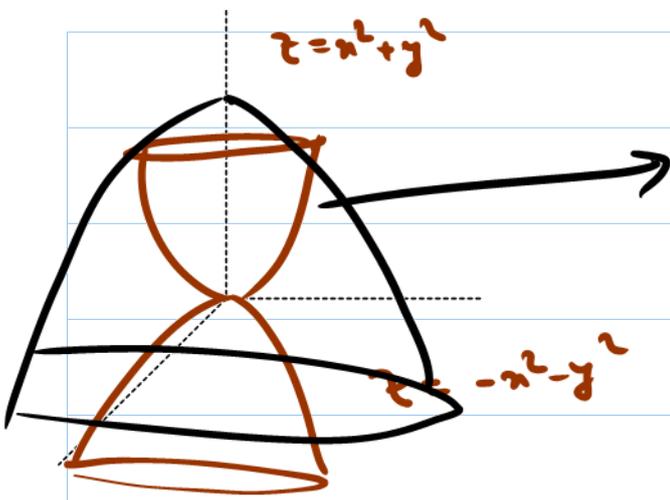
$$z^2 = 9 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

$$z \geq 0$$

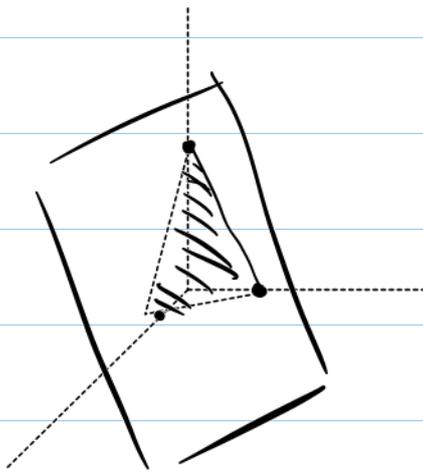
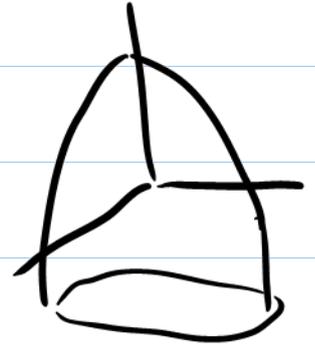
$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$





$$h(x, y) = 9 - x^2 - y^2 \quad \underline{\text{منه}}$$

$$z = 9 - x^2 - y^2$$

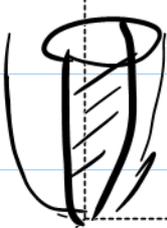


$$f(x, y)$$

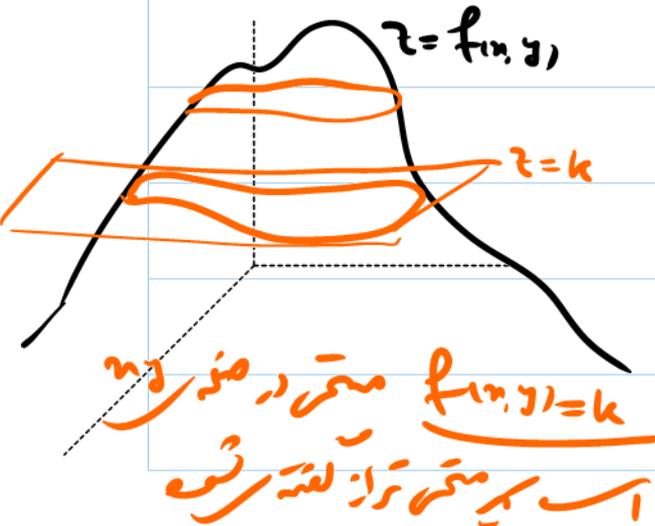
$$z = 6 - 3x - 2y \quad \underline{\text{منه}}$$

رسم منحنی : 3 نقطه

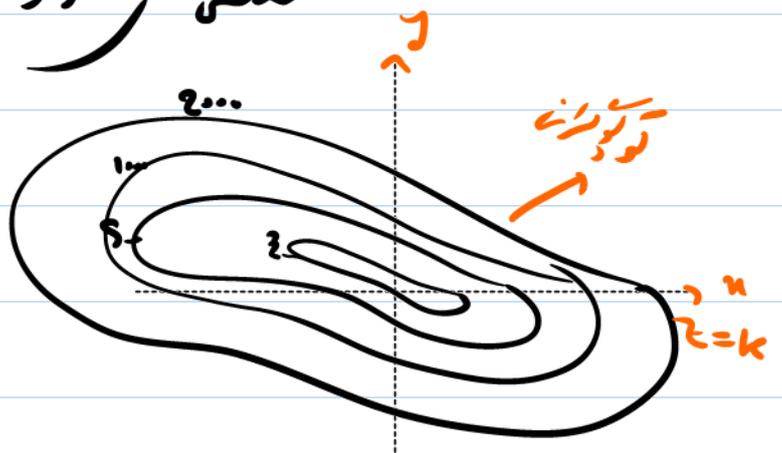
- $(0, 3, 0)$
- $(2, 0, 0)$
- $(0, 0, 6)$



$$z = x^2 + y^2 \quad \underline{\text{منه}} \quad h(x, y) = 4x^2 + y^2$$

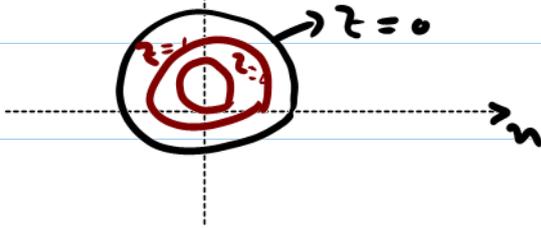


منحنی‌های تراز



level curve

مثال متساوی‌ترازی تابع  $g(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$  را رسم کنید.

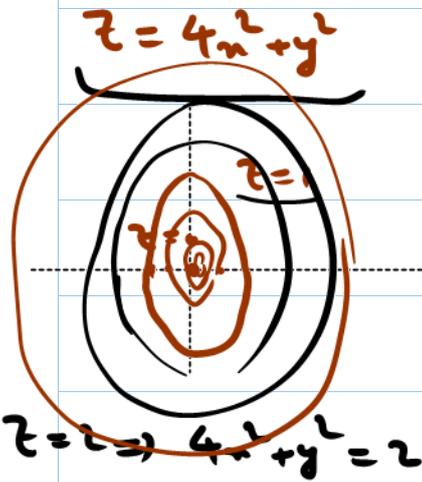


$$z = \sqrt{9-x^2-y^2}$$
$$z=0 \Rightarrow x^2+y^2=9$$

$$z=1 \Rightarrow 1 = 9-x^2-y^2$$

مثال  
 $h(x,y) = 4x^2+y^2$

مثال  $z=1$



$$z=0$$
$$z=1$$

$$4x^2+y^2=1 \Rightarrow$$
$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$z=2 \Rightarrow 4x^2+y^2=2$$

$$\checkmark \quad 2x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2} = 1$$

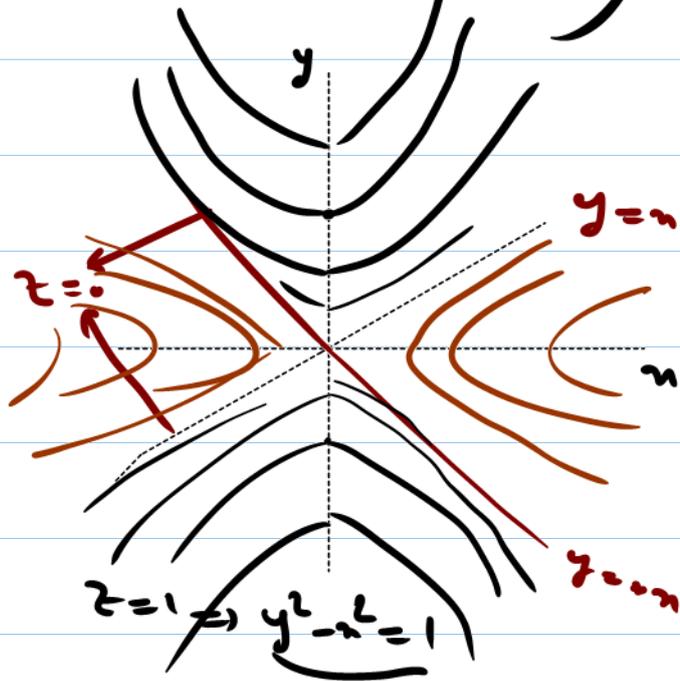
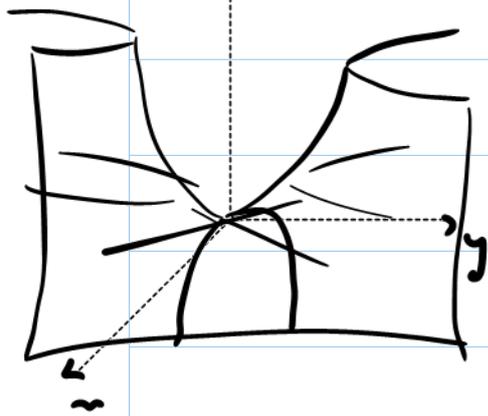
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{2} = 1$$

توجه متساوی‌تراز در صورتی که رسم شود.

نمود

مختصات استاز تابع

$z = y^2 - x^2$  را رسم کن



$z = 0$

$y^2 = x^2$

$z = 1 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1$

هنا

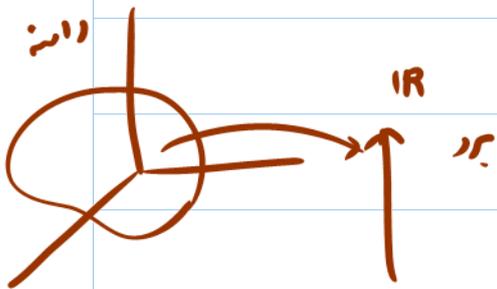
$z = \frac{1}{2}$

$z = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$

تابع سه متغیره

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$

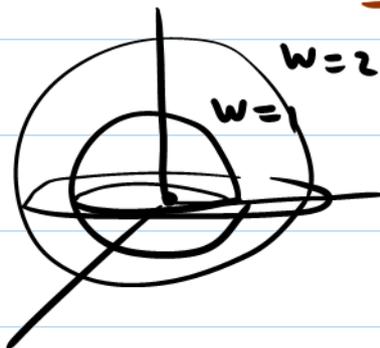


$w = f(x, y, z)$

ردیفها استاز

$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

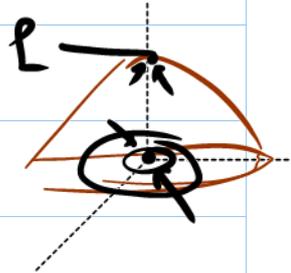
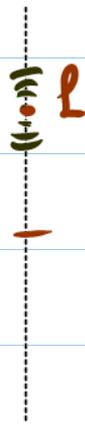
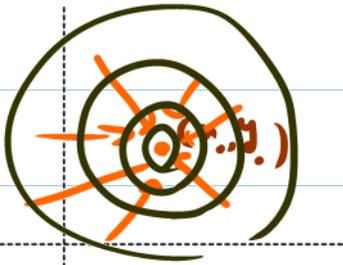
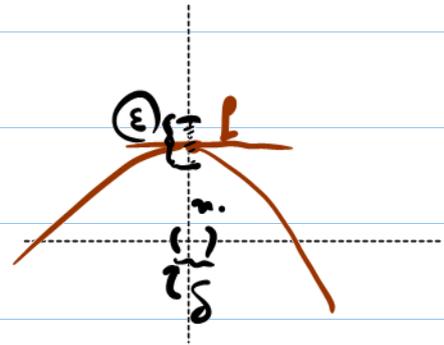


# حد و پیوستگی

فاصله :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  از  $L$  به هر اندازه ای

دکراه ما کم باشد به شرطی که فاصله  $x$  از

$a$  به اندازه  $\epsilon$  کافی کم باشد



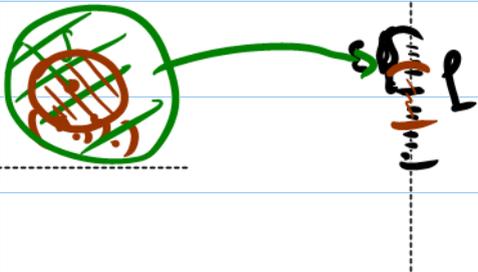
کامپان :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  :  $f(x,y)$  متناهی تابع

دقیق  $(x,y)$  به  $(a,b)$  نزدیک شود

به  $L$  نزدیک شود

جانب  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$   
 مقدار دلخواہ  
 نقطہ کا  
 حول  $(x_0, y_0)$

$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (x,y)$ 
 $\left( \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \rightarrow \underbrace{|f(x,y) - L|}_{\text{فاصلہ}} < \epsilon \right)$   
 دقتاً فاصلہ  $(x_0, y_0)$  از  
 از  $(x_0, y_0)$  کم از  $\delta$  ہے  
 فاصلہ  $(x_0, y_0)$  از  
 از  $\epsilon$  کم از  $\delta$  ہے



من  $\delta$  و  $\epsilon$  دردم.  $\delta$  با  $\epsilon$  هم هست.

مثال ثابت کنید  
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$

لیفٹ نڈ رکھیں کہ با  $\epsilon$   $\delta$  میں  $\delta$  ایسا ہو سکے۔

من بہتر  $\delta$  کی تلاش دارا ہم  $\delta$  با  $\epsilon$  ہم هست۔

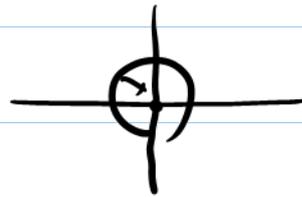
کارے لکھنے کے:

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| < \epsilon$$

A

$$\frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|} < \epsilon$$

پرکھ لیں۔



من (لا) راجعہ رہ (ہذا) تردید لکھنے؟

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = |y|$$

$$\frac{|3x^2y|}{x^2+y^2} \leq 3 \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 3\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$$

تو ذہن آ کر من کارے لکھنے کے  $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$  اسٹانڈرڈ ریڈیوس

$$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\epsilon}{3}$$

جواب سوال  
دیکھ لیتے کہ آکر

$$\delta = \frac{\epsilon}{3}$$

آنگے  $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$  اسٹانڈرڈ ریڈیوس

$\epsilon$

$$\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\epsilon}{3} \rightarrow |f(x,y)| < \epsilon$$

$$\delta = \frac{\epsilon}{3} \checkmark$$

$$\frac{|3x^2y|}{|x^2+y^2|}$$

$$x^2 < x^2 + y^2 \quad \checkmark$$

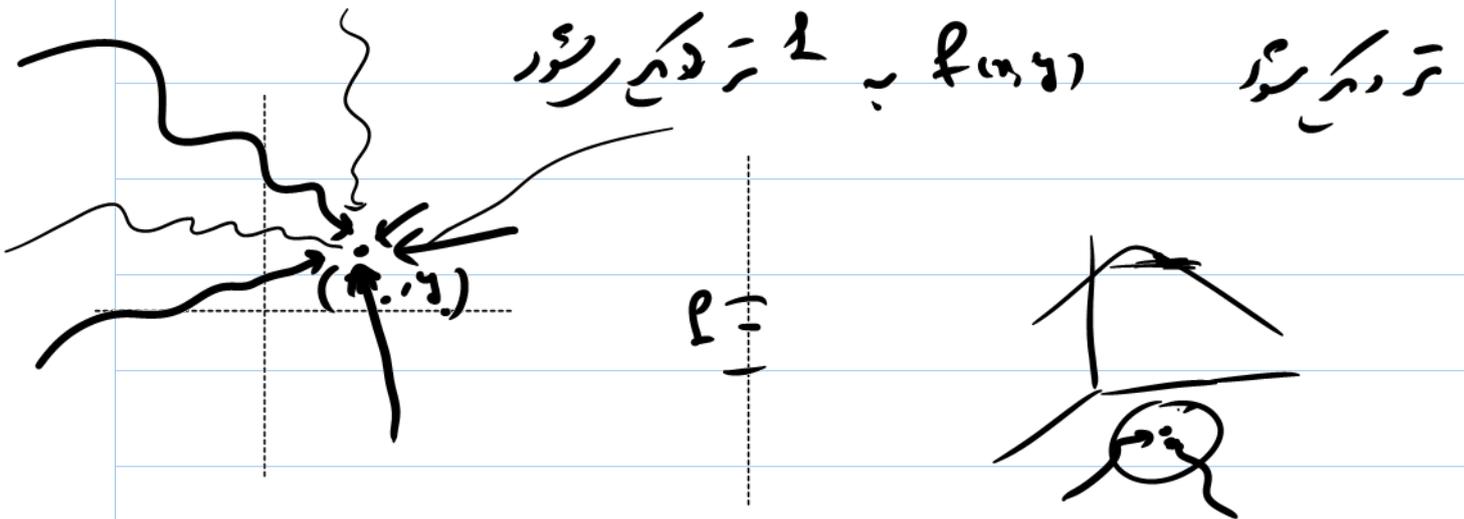
$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

وجود ندارد .

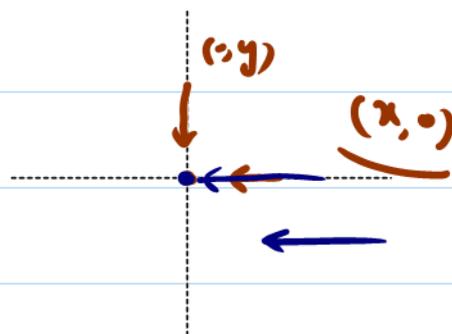
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

مثال آن که درصیه که

تعریف وقتی که  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  یعنی به هر  $\epsilon$  که  $(x,y)$  به  $(a,b)$



$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$



$$(x,y) \rightarrow (0,0)$$

؟

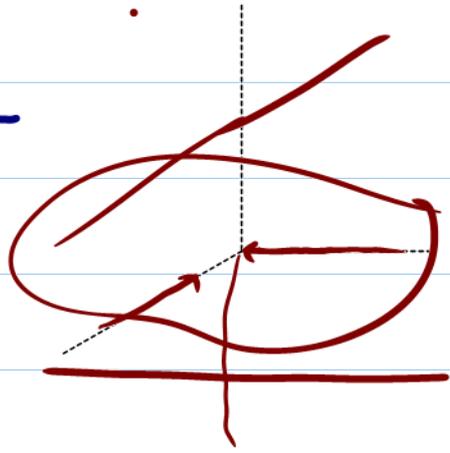
$$\frac{x^2}{x^2}$$

آکر (۳,۶) اور محدہ (۶,۰) بہ (۰,۰) تک کیسے لگوا کر اسیاقہ افندہ؟

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \frac{x^2}{x^2}$$

آکر دوسرے (۶,۰) سے (۰,۰) کیسے لگوا کر اسیاقہ افندہ؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$$



آکر دوسرے (۰,۶) سے (۰,۰) کیسے لگوا کر اسیاقہ افندہ؟

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

دوسرے متعادلتے تابع دوسرے متعادلتے دارد. ہر حد ہزار