

توابع مختلط

تکلیف ۲ - مهلت تحویل ۱۶ خرداد ۱۴۰۵

تمرین ۱. با استفاده از تابع $f(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}$ (با شاخه $-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$) و مسیر نیم‌دایره‌ای در نیم‌صفحه بالایی، نشان دهید که $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$.

تمرین ۲. نشان دهید که معادله $z^5 + 4z^2 + 1 = 0$ دقیقاً دو ریشه در دیسک $|z| < 1$ دارد.

تمرین ۳. تابع $g(z) = \frac{1}{z^3}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نوع نقطه تکین $z = 0$ را مشخص کنید.

(ب) نشان دهید که تصویر هر همسایگی سوراخ‌شده از $z = 0$ تحت نگاشت g در \mathbb{C} چگال نیست. چرا این موضوع با قضیه کازوراتی-وایرستراس تناقض ندارد؟

تمرین ۴. نشان دهید تابع $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)}$ در صفحه مختلط مرمورفیک است و قطب‌ها و مرتبه آن‌ها را مشخص کنید.