

توابع مختلط

تکلیف ۱ - مهلت تحویل ۲ خرداد ۱۴۰۵

تمرین ۱. انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ را محاسبه کنید.

تمرین ۲. فرض کنید C یک منحنی بسته ساده باشد به طوری که نقطه $z_0 = z$ را در بر بگیرد. ثابت کنید

$$\oint_C \frac{f'(z)}{(z - z_0)} dz = \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

تمرین ۳. حاصل انتگرال $\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz$ را بیابید و سپس از روی آن، مقدار انتگرال $\int_0^{\pi} e^{a \cos \theta} \cos(a \sin \theta) d\theta$ را محاسبه کنید.

تمرین ۴. فرض کنید $f(z) = \frac{z}{z}$. نشان دهید که $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ وجود ندارد.

تمرین ۵. تابع $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ مفروض است. با در نظر گرفتن بسط سری لوران این تابع حول نقطه $z = i$ ، مقدار انتگرال زیر را به دست آورید: $\int_C \frac{dz}{(z-i)^{n+2}}$ که در آن C دایره‌ای به معادله $|z-i| = R$ حول نقطه $z = i$ در جهت مثبت است و n عدد صحیح ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) می‌باشد.

تمرین ۶. ماندهٔ هریک از توابع زیر را در $z = 0$ بیابید.

الف) $\frac{1}{z+z^2}$

ب) $\frac{z - \sin z}{z}$