

واقعه

بینم

یادآوری منتق جزئی - partial

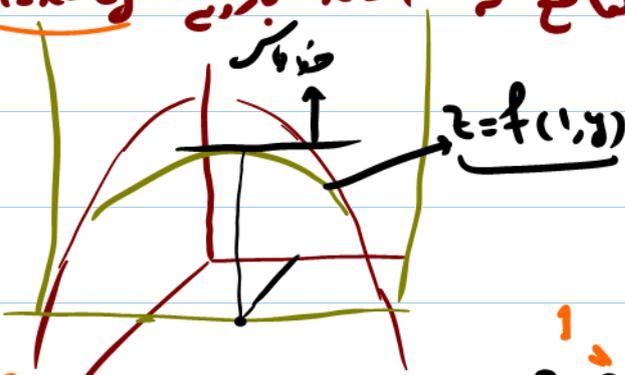
$$\underbrace{z = f(x, y)} \quad \underbrace{z_0 = (x_0, y_0)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$z = f(x, y)$$

مشتق این  $z = f(x, y)$    
 به تدقیق

مثال معادله خطی که بر منحنی عمل قاطع صورت  $x=1$  دارد  $z = 4x^2 - 2y^2$



رابطه (1,1)

درجه  $z$  توانی به تغییر کند

$$4x^2 - 2y^2$$

$$\begin{cases} z - z_0 = f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

$$f_y = -4y$$

$$f_y(1, 1) = -4$$

$$\underbrace{z - 1 = 4(y - 1)}_{x=1}$$

$$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right) \quad \text{مثال}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+y} \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{(1+y)^2} \cos\left(\frac{x}{1+y}\right)$$

مثال مردانیم که تابعها از  $x, y$  است و معادله زیر برقرار است:

مثال  
تابع  $x, y$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 6xyz$$

معادله برضت

$$\frac{\partial z}{\partial x} \text{ را بیابید}$$

بر حسب  $x$  مشتق کنید از طرفین:

$$3x^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \times 3z^2 = 6yz + \frac{\partial z}{\partial x} (6xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \times (3z^2 - 6xy) = 6yz - 3x^2 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = \dots$$

$$z = (f(x,y))$$

$$(f(x,y))^3$$

$$z = (f(x,y))^3$$

$$f(x,y) \times 3(f(x,y))^2$$

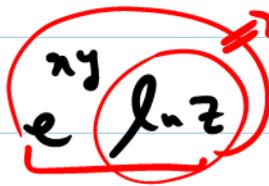
تدریس برای توابع متغیر هم مشتق جزئی داریم.

$$w = F(x, y, z)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$w = f(x, y, z)$$

$$f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$$



$e^{xy}$

مثال

$$f_x = y e^{xy} \ln z$$

$$f_y = x e^{xy} \ln z$$

$$f_z = e^{xy} \frac{1}{z}$$

$$f(x, y, z) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

مثال

$$f_x = 3x^2 + 2xy^3$$

خوب،  $f_x$  تا اینجا،  $x$  ثابت.

$$? = f_{xy}$$

برای

$$f_{xy} = 6xy^2$$

اینان برابر!

برای  $f_{yx}$  را حساب کنید.

$$f(x, y, z) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$$

$$f_y = 3x^2 y^2 - 4y$$

$$f_{yx} = 6xy^2$$

$$f_{xx} = ? \quad f_x = 3x^2 + 2xy^3$$

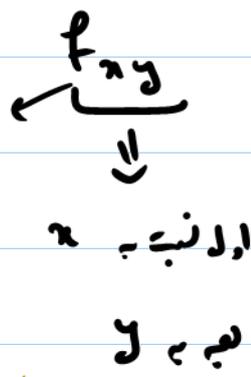
$$f_{xx} = 6x + 2y^3$$

$$f_{xx} = f_{xy}$$

$$f_{yx} = f_{yy}$$

$$f_{yy} = ?$$

خاندانگراری



$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

در همه اینگونه نیست که  $f_{yx} = f_{xy}$  خانم شیرین طاهر مدرس

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{در صفر} \end{cases}$$

$f_{xy}$  نیز اولاً نسبت به x بعد نسبت به y  
 $f_{yx}$  در صفر ناقص

$f_{xy}(0,0) = ?$



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{در صفر} \end{cases} \quad f_x = \begin{cases} \frac{3x^2 y (x^2 + y^2) - 2x(x^3 y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ f_x(0,0) = ? \quad 0 \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0 \quad \checkmark$$

$$f_x = \begin{cases} \frac{x^4 y + 3x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ 0 \end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,0+h) - f_x(0,0)}{h} = 0$$

$$= \lim 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$f_{xy}(c) = 0$$

برای تابع با هم برابرند.

$$f_{yx}(c) = 0$$

تمرین

در صورتی که  $f_{xy}$  و  $f_{yx}$  یکنواخت باشند

Clairou قضیه

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

جواب  
آورد

$$f_{xy}(a,b)$$

$$\frac{f_x(a, b+h) - f_x(a, b)}{h}$$

$$f_{yx}(a,b)$$

$$\frac{f_y(a+h, b) - f_y(a, b)}{h}$$

$$f_{xy}(a, c) \times h$$

اطلاعات در مورد مشتق  $u$  درج

تابع  $u$

معادلات دینامیک

تابع  $u$  را پیدا کنید که در معادله دینامیک زیر صدق کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

معادله دینامیک

توجه معادله فوق هم در صورتی که در تابع هارمونیک (مربع) معادله فوق صدق کند.

مثال ۱ درص  $u = e^{\sin y}$  که تابع هارمونیک است.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{\sin y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{\sin y} \cos y$$

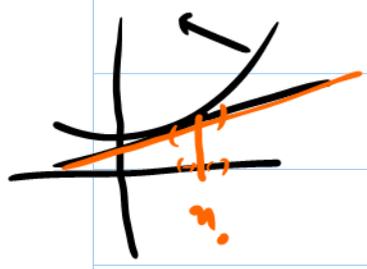
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{\sin y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{\sin y} \sin y$$

تابع هارمونیک

$y = f(x)$  معادله صغیر یکس در ارتباط آن با مشتقات جزئی



$dy = f'(x) dx$   
 تفاضل یکس

$\Delta y = f'(x) \Delta x$

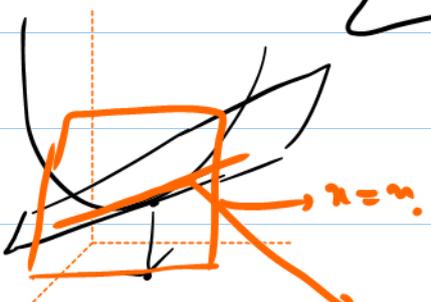
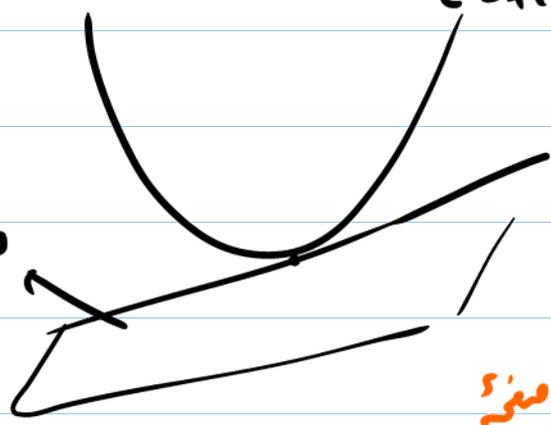
$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$

تفاضل تقریباً یکس

$z = f(x, y)$

معادله صغیر یکس بر روی  $z = f(x, y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  چیست؟

صغیر یکس



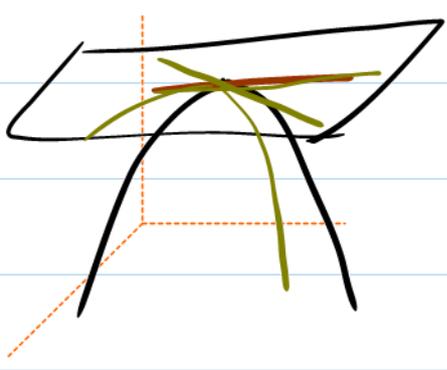
تفاضل یکس در صغیر یکس  
 واضح است

معادله صغیر  $z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0)$

$A, B$  اعدادی هستند

$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

تفاضل یکس بر روی  
 مستویها در صغیر یکس



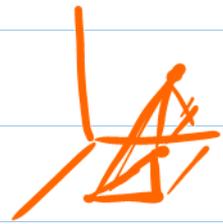
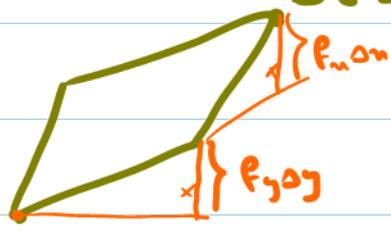
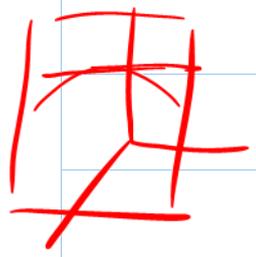
$A = f_x$   
 $B = f_y$

ضلع مصادر هفتگهاس برورد  $z = f(x, y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$ :

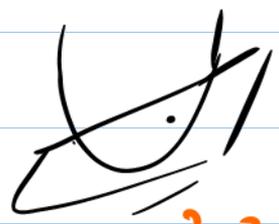
تغیرات هفتگهاس  $\Delta z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

$\Delta z = A(x - x_0) + B(y - y_0)$

$\Delta z = f_x \Delta x + f_y \Delta y$



مثال مصادر هفتگهاس بر کورد  $z = x^2 + y^2$  در نقطه  $(1, 1, 3)$  را بنویسید.



$f_x = 2x$       $f_x(1, 1) = 2$   
 $f_y = 2y$       $f_y(1, 1) = 2$

$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$   
 $z - 3 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$

مثال برانجام  $z = x^2 + y^2$  در نزدیکی نقطه  $(1, 1, 3)$  که تقریب خطی بنویسید.

$z - 3 = 2(x - 1) + 2(y - 1)$   
 $z = 3 + 2(x - 1) + 2(y - 1)$

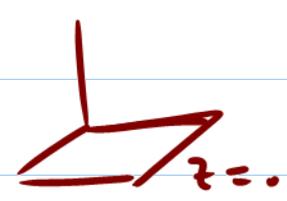
سوال آیا همیشه هفتگهاس تقریب خطی برانجام آید؟

تقریباً  $z=0$  تقریباً برابر است؟

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$



$$z = f_x(-) + f_y(-) = 0 \quad z=0$$

تفاوت در مطالعه قبل تابع  $f_x, f_y$  پیوسته بودند اما در این مثال پیوسته نیستند.

توضیح گوییم که در آنجا همواره  $z$  تقریباً  $z=0$  برابر تابع باشد دینازیل ذویر

گفته می شوند. دینازیل ذویر یا مشتق ذویر معنی؟

توجه دینازیل ذویر  $f$  فقط به معنی  $f_x, f_y$  نیست!



