آنالیز مختلط

مهریار علوی

تمرین سری ۳

تمرین ۱. تابع مختلط $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ را در نظر بگیرید. قطب‌ها و مقدار مانده در آن‌ها را محاسبه کنید.

تمرین ۲. تابع $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ را در نظر بگیرید. قطب و مقدار مانده آن را بیابید.

تمرین ۳. مانده‌های تابع $f(z) = \frac{1}{z^3-z}$ را در تمامی قطب‌های آن محاسبه کنید.

تمرین ۴. تابع $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2}$ را در نظر بگیرید. مانده این تابع را در قطب $z = 2i$ به دست آورید.

تمرین ۵. مقدار مانده تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ را در $z = 0$ محاسبه کنید.

تمرین ۶. با استفاده از تابع $f(z) = \frac{(\log z)^2}{z^2+1}$ در ناحیه $\left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$ نشان دهید که:

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\, dx = 0$$

تمرین ۷. تعداد ریشه‌های معادله $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ را با احتساب چندگانگی آن‌ها، در طوق $1 \leq |z| < 2$ تعیین کنید.

تمرین ۸. فرض کنید C معرف دایره $|z| = 1$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مراحل زیر را طی کرده نشان دهید که:

$$\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

الف) با استفاده از بسط سری مکلورن برای e^z و استناد به قضیه یک بخش ۵۹ که بر مبنای آن می‌توان جمله به جمله انتگرال گرفت، انتگرال بالا را به صورت زیر بنویسید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

ب) با استفاده از قضیه بخش ۶۳، انتگرال‌های قسمت (الف) را محاسبه کرده به نتیجه مطلوب برسید.

تمرین ۹. فرض کنید C معرف دایره $|z| = ۱$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مراحل زیر را طی کرده نشان دهید که:

$$\int_C \exp\left(z + \frac{۱}{z}\right) dz = ۲\pi i \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!(n+۱)!}$$

الف) با استفاده از بسط سری مکلورن برای e^z انتگرال بالا را به صورت زیر بنویسید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right) dz$$

ب) انتگرال‌های قسمت (الف) را محاسبه کرده به نتیجه مطلوب برسید.

تمرین ۱۰. مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر: الف)

$$I_۱ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{۱}{۱+x^۲}\right)^۲ dx$$

ب) نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(۱+x^۲)^n} dx = \frac{۱ \cdot ۳ \cdot \dots \cdot (۲n-۱)\pi}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \dots ۲n}$$

تمرین ۱۱. نقطه $z = ۰$ برای تابع $f(z) = e^{۱/z}$ یک تکین اساسی است. با استفاده از این تابع، درستی قضیه کازوراتی_ وایرشتراس را نشان دهید. به طور خاص ثابت کنید برای هر عدد مختلط غیر صفر $w \in \mathbb{C}$، می‌توان دنباله‌ای از نقاط مانند z_n یافت به طوری که $z_n \to ۰$ و $f(z_n) = w$. (این نشان می‌دهد که تصویر هر همسایگی محذوف از مبدأ، شامل تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقطه صفر است، که در نتیجه در $\mathbb{C}$ چگال خواهد بود).

تمرین ۱۲. با استفاده از قضیه کازوراتی_ وایرشتارس رفتار تابع $f(z) = \sin(۱/z)$ را در مجاورت تکین اساسی $z_. = ۰$ بررسی کنید.

تمرین ۱۳. با استفاده از قضیه کازوراتی_ وایرشتارس رفتار تابع $f(z) = e^z$ را در نقطه تکین اساسی در بی‌نهایت $(z_. = \infty)$ بررسی کنید.