آنالیز مختلط

مهریار علوی

سری تمرین ۱

تمرین ۱. *مجموعهٔ نقاط z در صفحهٔ مختلط را که با روابط زیر تعریف می‌شوند، به‌صورت هندسی توصیف کنید:*

(الف) $|z - z_1| = |z - z_2|$ که در آن $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(ب) $1/z = \overline{z}$.

(ج) $\Re(z) = 3$.

(د) $\Re(z) > c$ (به‌ترتیب $\geq c$)، که در آن $c \in \mathbb{R}$.

(ه) $\Re(az + b) > 0$ که در آن $a, b \in \mathbb{C}$.

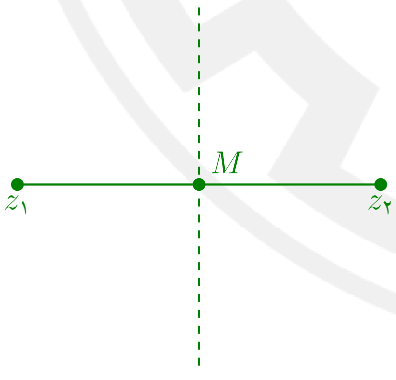
(و) $|z| = \Re(z) + 1$.

(ز) $\Im(z) = c$ با $c \in \mathbb{R}$.

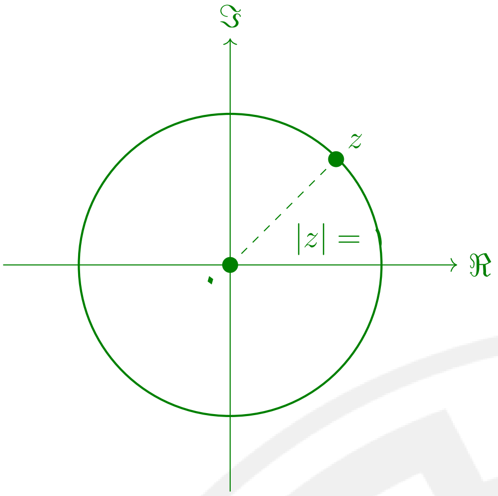
(ح) $|z - 2i| \geq 3$

پاسخ ۱. *بگذارید $z = x + iy$ که در آن $x, y \in \mathbb{R}$.*

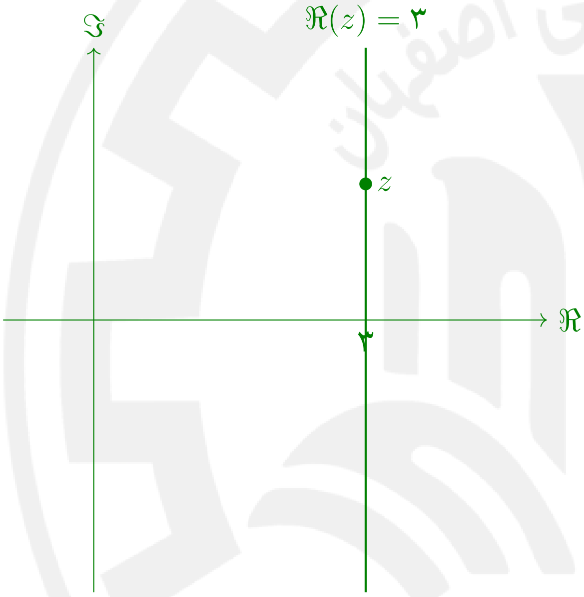
(الف) *این مجموعه شامل تمام نقاطی است که فاصلهٔ آن‌ها از z_1 و z_2 برابر باشد. از نظر هندسی، این مجموعه عمودمنصف پاره‌خط واصل بین z_1 و z_2 است.*



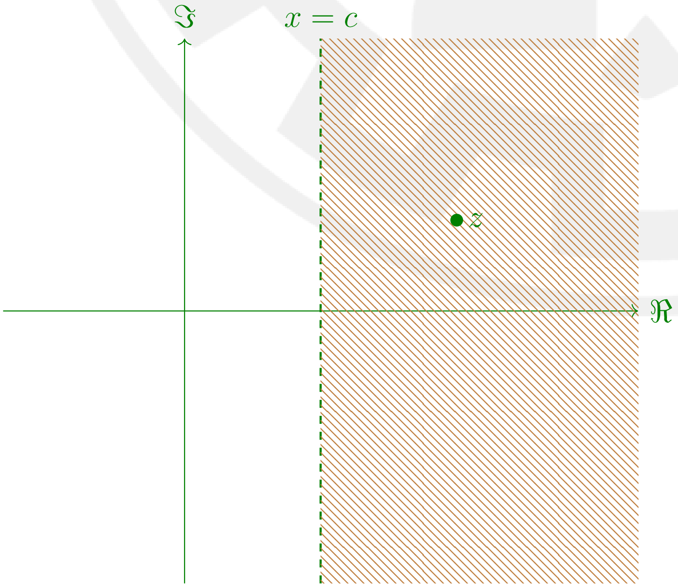
(ب) *از رابطهٔ $1/z = \overline{z}$ نتیجه می‌شود که $|z|^2 = z\overline{z} = 1$، پس $|z| = 1$. این مجموعه دایرهٔ واحد به مرکز مبدأ مختصات است.*



(ج) شرط $\Re(z) = ۳$ یعنی $x = ۳$، که یک خط قائم موازی محور موهومی است.



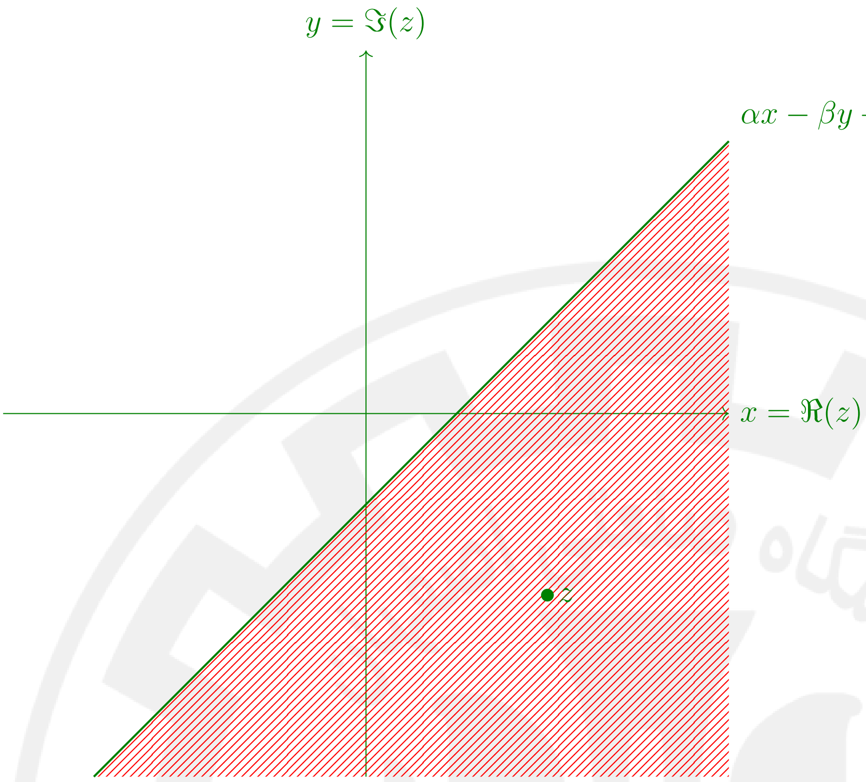
(د) شرط $\Re(z) > c$ (به‌ترتیب $\Re(z) \geq c$) یعنی $x > c$ (به‌ترتیب $x \geq c$). این مجموعه یک نیم‌صفحهٔ باز (به‌ترتیب



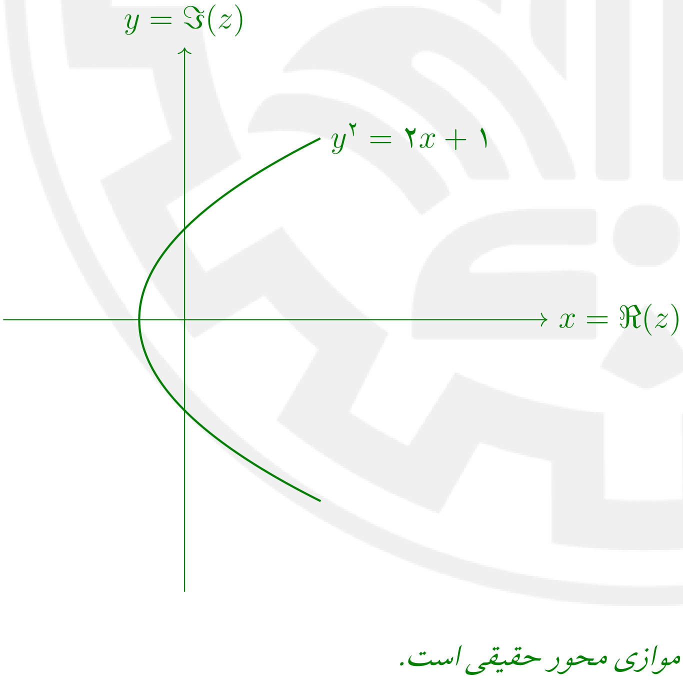
بسته) در سمت راست خط $x = c$ را توصیف می‌کند.

(ه) بنویسید $a = \alpha + i\beta$، $z = x + iy$ و $b = b_۱ + ib_۲$. آنگاه $\Re(az + b) = \alpha x - \beta y + b_۱$. پس نامساوی

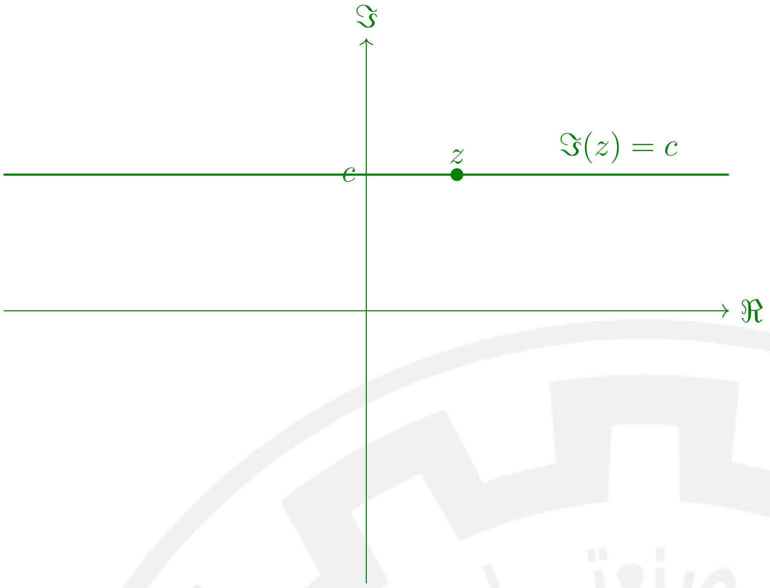
$\Re(az+b)>0$ یک نیم‌صفحه است که مرز آن خط $\alpha x-\beta y+b_1=0$ می‌باشد.



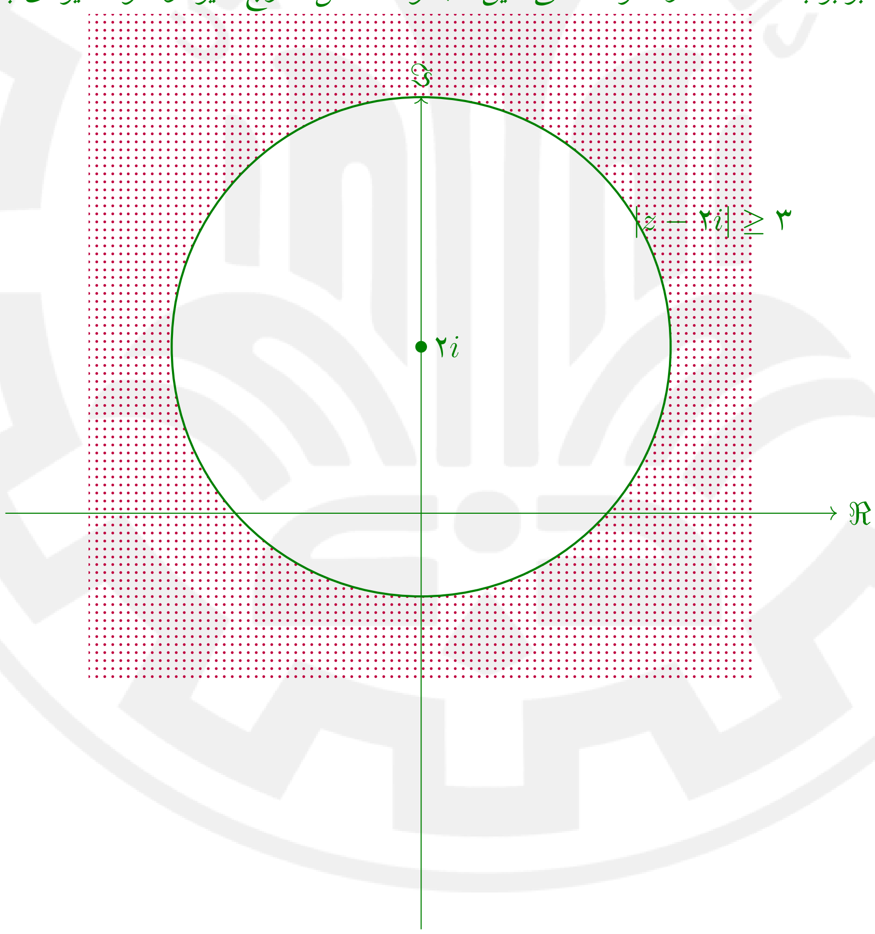
(و) معادلهٔ $|z|=\Re(z)+1$ به صورت $\sqrt{x^2+y^2}=x+1$ نوشته می‌شود. با مجذور گرفتن داریم $x^2+y^2=(x+1)^2=x^2+2x+1$، در نتیجه $y^2=2x+1$. این معادله یک سهمی است که به سمت راست باز می‌شود.



(ز) شرط $\Im(z)=c$ یعنی $y=c$، که یک خط افقی موازی محور حقیقی است.



(ح) نامساوی $|z - 2i| \geq 3$ مجموعهٔ تمام نقاط صفحهٔ مختلط را نشان می‌دهد که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ $2i$ (یعنی نقطهٔ $(0, 2)$) حداقل برابر با ۳ است. از نظر هندسی، این مجموعه شامل خارج دایره و خود دایره‌ای با مرکز $(0, 2)$ و



شعاع ۳ است.

تمرین ۲. ثابت کنید که $\sqrt{2}\,|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$. (راهنمایی: این نابرابری را به $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ تبدیل کنید.)

پاسخ ۲. برای اثبات نابرابری $\sqrt{2}|z| \geq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$، فرض می‌کنیم $z = x + iy$ باشد که در آن $x = \operatorname{Re} z$ و $y = \operatorname{Im} z$ است. بنابراین داریم $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. با جایگذاری در نابرابری، عبارت $\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| + |y|$

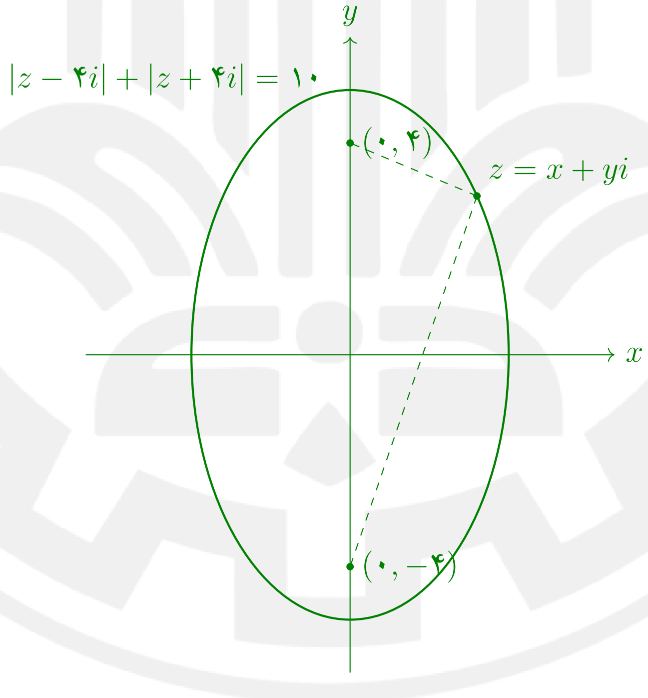
حاصل می‌شود. چون طرفین نامنفی هستند، با به توان ۲ رساندن آن‌ها خواهیم داشت $۲(x^۲ + y^۲) \geq (|x| + |y|)^۲$. با بسط دادن طرف راست، نابرابری به صورت $۲x^۲ + ۲y^۲ \geq x^۲ + ۲|x||y| + y^۲$ در می‌آید. با انتقال تمام جملات به یک سمت، عبارت $x^۲ - ۲|x||y| + y^۲ \geq ۰$ به دست می‌آید که می‌توان آن را به صورت $(|x| - |y|)^۲ \geq ۰$ نوشت. از آنجا که توان دوم هر عدد حقیقی همواره نامنفی است، درستی نابرابری ثابت می‌شود.

تمرین ۳. با استفاده از این حقیقت که $|z_۱ - z_۲|$ فاصله بین دو نقطه $z_۱$ و $z_۲$ در صفحه مختلط است، یک استدلال هندسی بیاورید که معادله $|z - ۴i| + |z + ۴i| = ۱۰$ نمایش بیضی‌ای است که کانون‌های آن $(۰, \pm۴)$ هستند.

پاسخ ۳. برای تفسیر هندسی معادله، عدد مختلط z را به صورت $z = x + yi$ در نظر می‌گیریم که متناظر با نقطه (x, y) در صفحه مختلط است. طبق تعریف فاصله در صفحه مختلط، $|z_۱ - z_۲|$ فاصله بین دو نقطه $z_۱$ و $z_۲$ را نشان می‌دهد.

اکنون دو عدد مختلط ثابت $۴i$ و $-۴i$ به ترتیب متناظر با نقاط $(۰, ۴)$ و $(۰, -۴)$ در صفحه مختلط هستند. بنابراین $|z - ۴i|$ فاصله نقطه (x, y) از نقطه $(۰, ۴)$ و همچنین $|z + ۴i| = |z - (-۴i)|$ فاصله نقطه (x, y) از نقطه $(۰, -۴)$ است. در نتیجه معادله $|z - ۴i| + |z + ۴i| = ۱۰$ بیان می‌کند که مجموع فاصله‌های نقطه (x, y) از دو نقطه ثابت $(۰, ۴)$ و $(۰, -۴)$ برابر با ۱۰ است.

طبق تعریف هندسی بیضی، مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فاصله آن‌ها از دو نقطه ثابت (کانون‌ها) مقداری ثابت باشد، یک بیضی را تشکیل می‌دهد. در اینجا کانون‌ها $(۰, ۴)$ و $(۰, -۴)$ هستند و مقدار ثابت برابر ۱۰ است؛ بنابراین این معادله نمایش‌دهنده بیضی‌ای با کانون‌های $(۰, \pm۴)$ است.



تمرین ۴. فرض کنید $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ضرب داخلی معمول در $\mathbb{R}^۲$ باشد. اگر $Z = (x_۱, y_۱)$ و $W = (x_۲, y_۲)$ باشند، آنگاه $\langle Z, W \rangle = x_۱x_۲ + y_۱y_۲$. یک ضرب داخلی هرمیتی $(\cdot, \cdot)$ روی $\mathbb{C}$ به صورت $(z, w) = z\overline{w}$ تعریف کنید. نشان دهید که $\langle z, w \rangle = \frac{۱}{۲}\big((z, w) + (w, z)\big) = \Re(z, w)$، که در آن $z = x + iy$ با $(x, y) \in \mathbb{R}^۲$ همانی گرفته می‌شود.

پاسخ ۴. بگذارید $z = x + iy$ و $w = u + iv$ باشد. آنگاه

$z + \bar{z} = ۲Re(z)$

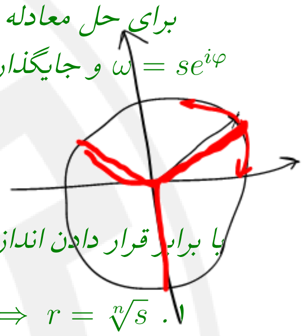
$$(z,w)=z\overline{w}=(x+iy)(u-iv)=xu+yv+i(yu-xv).$$

در نتیجه $(w,z)=\overline{(z,w)}=xu+yv-i(yu-xv)$. پس $\Re(z\overline{w})=xu+yv=\frac{1}{2}((z,w)+(w,z))$.
اما $xu+yv=\langle(x,y),(u,v)\rangle$ که همان ضرب داخلی معمول در $\mathbb{R}^2$ است.

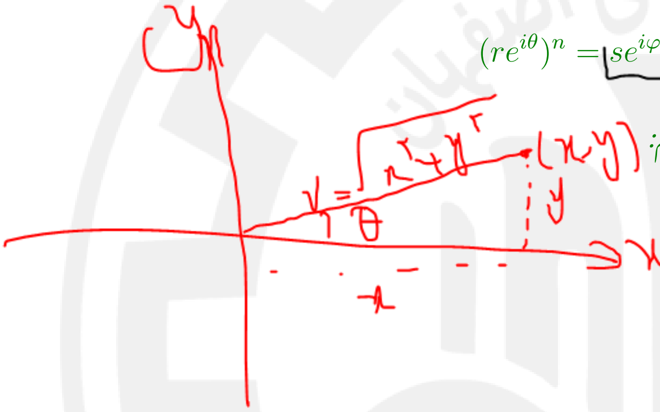
تمرین ۵. فرض کنید $\omega=se^{i\varphi}$ که در آن $s\geq 0$ و $\varphi\in\mathbb{R}$ است. معادله $z^n=\omega$ را در $\mathbb{C}$ حل کنید، که در آن n یک عدد طبیعی است. چند جواب وجود دارد؟

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ و $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

پاسخ ۵.
برای حل معادله $z^n=\omega$ در مجموعه اعداد مختلط $\mathbb{C}$، ابتدا z را به فرم قطبی می‌نویسیم: $z=re^{i\theta}$. با فرض $\omega=se^{i\varphi}$ و جایگذاری در معادله داریم:



$$(re^{i\theta})^n=se^{i\varphi}\implies r^ne^{in\theta}=se^{i\varphi}$$



با برابر قرار دادن اندازه و آرگومان دو طرف معادله نتیجه می‌گیریم:

۱. $r^n=s\implies r=\sqrt[n]{s}$

۲. $n\theta=\varphi+2k\pi\implies\theta_k=\frac{\varphi+2k\pi}{n}\quad(k\in\mathbb{Z})$

بنابراین جواب‌های معادله به صورت زیر هستند:

$$z_k=\sqrt[n]{s}e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}\quad k\in\mathbb{Z}$$

$k=\ldots,-1,\ldots,1$

تعداد جواب‌ها:

- اگر $s>0$ باشد، با قرار دادن $k=0,1,\ldots,n-1$ دقیقاً n **جواب متمایز** به دست می‌آید که روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt[n]{s}$ قرار دارند.
- اگر $s=0$ باشد ($\omega=0$)، تنها **یک جواب** ($z=0$) وجود دارد.

نمایش هندسی (مثال برای $n=5$ و $\varphi=\frac{\pi}{6}$):

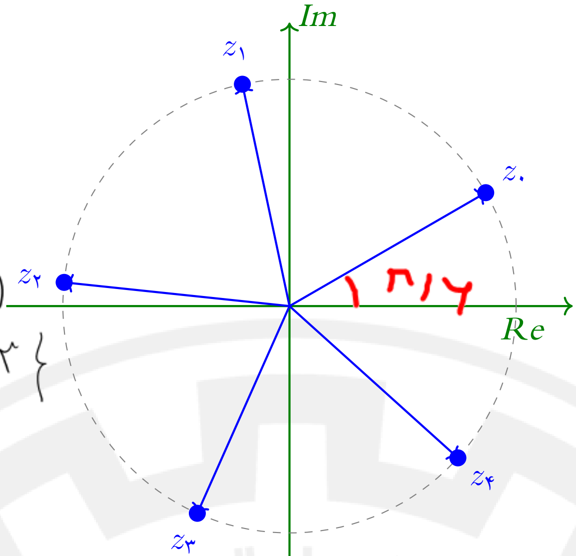
A = {۱,۲,۳} (A, ⊆)

{۱} ⊆ {۰,۲} ⊆ {۱,۲,۳}

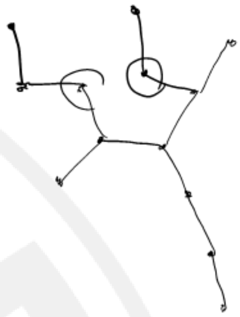
{۱,۲} X {۲,۳}

$\nsubseteq$

$\nsucc$



ترتیب‌ها



تمرین ۶. نشان دهید که تعریف یک ترتیب کلی روی $\mathbb{C}$ ناممکن است. به عبارت دیگر، نمی‌توان رابطه‌ای $\succ$ میان اعداد مختلط یافت به‌طوری‌که:

(i) برای هر $z, w \in \mathbb{C}$ دقیقاً یکی از این حالت‌ها برقرار باشد: $z \succ w$، $w \succ z$ یا $z = w$.

(ii) برای هر $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$، اگر $z_1 \succ z_2$ باشد آنگاه $z_1 + z_3 \succ z_2 + z_3$.

(iii) برای هر $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ با $z_3 \succ 0$، اگر $z_1 \succ z_2$ باشد آنگاه $z_1 z_3 \succ z_2 z_3$.

پاسخ ۶. برهان خلف: فرض کنید چنین ترتیب کلی $\succ$ روی $\mathbb{C}$ وجود داشته باشد.
طبق خاصیت (i)، دقیقاً یکی از حالت‌های $i \succ 0$، $0 \succ i$ یا $i = 0$ برقرار است. چون $i \neq 0$، تنها دو حالت اول ممکن‌اند.
ابتدا فرض کنید $i \succ 0$. آنگاه با استفاده از خاصیت (iii) و ضرب دو طرف نامساوی در i (با توجه به اینکه $i \succ 0$)، داریم $i \cdot i \succ 0 \cdot i$، یعنی $-1 \succ 0$. دوباره با استفاده از خاصیت (iii) و ضرب در $-1 \succ 0$، به $1 \succ 0$ می‌رسیم. اما اکنون با به‌کارگیری خاصیت (iii) روی $i \succ 0$ و $1 \succ 0$ به $i = i \cdot 1 \succ 0 \cdot 1 = 0$ می‌رسیم که با $-1 \succ 0$ در تناقض است (با جمع کردن نامساوی‌ها).
حال فرض کنید $0 \succ i$. آنگاه $-i \succ 0$ با استفاده از خاصیت (ii). با ضرب در $-i \succ 0$ و استفاده از خاصیت (iii) داریم $(-i)(-i) \succ 0 \cdot (-i)$، یعنی $-1 \succ 0$ که دوباره تناقضی مشابه قبل ایجاد می‌کند.
در هر دو حالت به تناقض می‌رسیم. بنابراین هیچ رابطه‌ای $\succ$ که خصوصیات (i)، (ii) و (iii) را ارضا کند نمی‌تواند روی $\mathbb{C}$ وجود داشته باشد.

تمرین ۷. ۱۰. با تجزیه $z^4 - 4z^2 + 3$ به دو عامل درجه دوم، نشان دهید که اگر $|z| = 2$ واقع باشد، آنگاه $\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \frac{1}{3}$.

$|a+b| \leq |a| + |b|$

پاسخ ۷. برای حل مسئله ابتدا چندجمله‌ای را تجزیه می‌کنیم. چندجمله‌ای داده شده برابر است با $z^4 - 4z^2 + 3$. اگر آن را به صورت درجه دوم در z^2 در نظر بگیریم، داریم $z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2)^2 - 4(z^2) + 3$. حال این عبارت را تجزیه می‌کنیم: $(z^2 - 1)(z^2 - 3)$. بنابراین $z^4 - 4z^2 + 3 = (z^2 - 1)(z^2 - 3)$. اکنون مقدار مورد نظر مسئله را

می‌نویسیم: $\frac{1}{|z^2-1||z^2-3|} = \frac{1}{|z^4-4z^2+3|} = \left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right|$. فرض شده است که $|z| = 2$. در نتیجه $|z^2| = |z|^2 = 4$. اکنون از نامساوی مثلثی معکوس استفاده می‌کنیم که می‌گوید $|a-b| \ge ||a|-|b||$. برای عبارت اول داریم: $|z^2-1| \ge ||z^2|-1| = |4-1| = 3$. برای عبارت دوم نیز داریم: $|z^2-3| \ge ||z^2|-3| = |4-3| = 1$. پس $|z^2-1||z^2-3| \ge 3 \times 1 = 3$ و در نتیجه $|z^4-4z^2+3| \ge 3$. اکنون دو طرف را معکوس می‌کنیم (چون مثبت هستند): $\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| = \frac{1}{|z^4-4z^2+3|} \le \frac{1}{3}$. پس نشان دادیم که اگر $|z| = 2$ باشد، آنگاه $\left|\frac{1}{z^4-4z^2+3}\right| \le \frac{1}{3}$.

$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n$

تمرین ۸. با استفاده از فرمول دموآور اتحادهای مثلثاتی زیر را نتیجه بگیرید:

(الف) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ (ب) $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$.

پاسخ ۸. فرمول دموآور یکی از نتایج مهم در تحلیل مختلط است که توان‌های اعداد مختلط را به کمک توابع مثلثاتی بیان می‌کند. اگر یک عدد مختلط به صورت قطبی نوشته شود، یعنی $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، آنگاه طبق فرمول دموآور داریم $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ این رابطه را می‌توان با استفاده از استقرا یا با بهره‌گیری از نمایش نمایی عدد مختلط $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ به دست آورد. اگر در این فرمول مقدار n را برابر ۳ قرار دهیم، می‌توانیم اتحادهای مثلثاتی مربوط به زاویه سه‌برابر را استخراج کنیم. اساس

برای این منظور می‌نویسیم $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$. اکنون طرف چپ را با استفاده از بسط دوجمله‌ای گسترش می‌دهیم: $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$.

حال توان‌های i را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم $i^2 = -1$ و $i^3 = -i$. بنابراین عبارت بالا برابر می‌شود با $\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$.

اکنون قسمت‌های حقیقی و موهومی را جدا می‌کنیم و می‌نویسیم $(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$. از طرف دیگر طبق فرمول دموآور داریم $\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)$. با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف نتیجه می‌گیریم که $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ و همچنین $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$.

بنابراین با استفاده از فرمول دموآور، اتحادهای زاویه سه‌برابر برای سینوس و کسینوس به دست آمد.

تمرین ۹. ریشه‌های ششم عدد ۸ را در اعداد مختلط بیابید

پاسخ ۹.

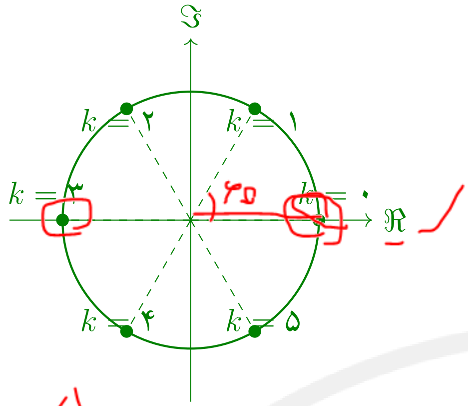
برای یافتن ریشه‌های ششم عدد ۸ کافی است معادلهٔ $z^6 = 8$ را حل کنیم. عدد ۸ را به صورت قطبی $8 = 8e^{i0}$ می‌نویسیم، سپس ریشهٔ ششم آن برابر است با

$z = \pm\sqrt{2}$

$$z_k = 8^{1/6} e^{i\frac{2\pi k}{6}} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi k}{3}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

این شش ریشه روی دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ قرار دارند و زاویهٔ بین هر دو ریشهٔ متوالی برابر با 60° است.

$$\left\{\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2},\ -\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}.$$

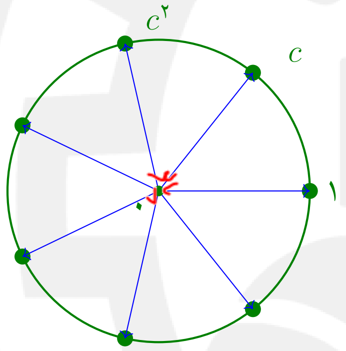


(۱-۲)

$z^n=1 \Rightarrow z^n=e^{i2k\pi} \rightarrow z=e^{i2k\pi/n}$

تمرین ۱۰. نشان دهید اگر c یکی از ریشه‌های nاِم واحد به غیر از خودِ یک باشد، آنگاه $۱+c+c^۲+\cdots+c^{n-۱}=۰$.

پاسخ ۱۰. فرض کنید c یکی از ریشه‌های nام واحد و غیر از ۱ باشد. آنگاه می‌دانیم که $c^n=۱$ و $c\neq ۱$ است. مجموع $S=۱+c+c^۲+\cdots+c^{n-۱}$. یک دنبالهٔ هندسی است. از فرمول مجموع دنبالهٔ هندسی داریم $S=\frac{۱-c^n}{۱-c}$. از طرفی چون $c^n=۱$ نتیجه می‌شود $S=\frac{۱-۱}{۱-c}=۰$. بنابراین: $۱+c+c^۲+\cdots+c^{n-۱}=۰$.



تمرین ۱۱. مجموعه‌های زیر را در صفحهٔ مختلط به‌طور هندسی نمایش دهید و برای هر یک تعیین کنید که باز، بسته، یا هیچ‌کدام نیستند. در پایان مشخص کنید کدام‌یک از مجموعه‌های بالا همبند و کدامیک «باز و نه بسته» هستند.

۱. $|z-۲+i|\leq ۱$

۲. $|۲z+۳|>۴$

۳. $\Im z=۱$

۴. $\Im z>۱$

۵. $۰\leq \arg z\leq \pi/۴ \quad (z\neq ۰)$

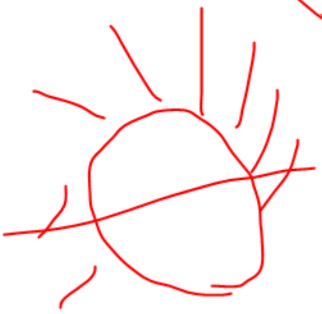
۶. $|z-۴|\geq |z|$

پاسخ ۱۱.
در ادامه هر یک از مجموعه‌های مسئله را بررسی می‌کنیم؛ هم نمودار هندسی آن‌ها توصیف می‌شود و هم ویژگی‌های توپولوژیک آن‌ها (باز بودن، بسته بودن، و همبند بودن) تعیین می‌گردد.

۱. $|z - 2 + i| \leq 1$

این مجموعه یک دیسک بسته به مرکز $(2, -1)$ و شعاع ۱ است.

- **بسته:** زیرا شامل مرز نیز هست.
- **باز نیست.**
- **همبند:** چون یک ناحیهٔ پیوستهٔ دایره‌ای است.



$|z + \frac{3}{2}| > 2$

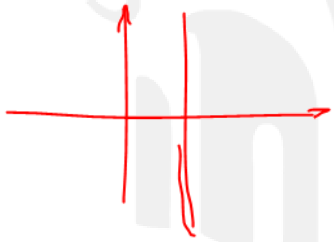
۲. $|2z + 3| > 4$

با بازنویسی داریم: $|z + \frac{3}{2}| > 2$، که ناحیهٔ بیرون یک دایره با شعاع ۲ و مرکز $(-1/5, 0)$ است.

- **باز:** زیرا مرز دایره حذف شده است.
- **بسته نیست.**
- **همبند نیست:** زیرا ناحیهٔ بیرون یک دیسک همبند است (در $\mathbb{R}^2$)، در حقیقت «راه‌همبند» نیست ولی همبند هست؛ پس **همبند** محسوب می‌شود.

۳. $\Im z = 1$

یک خط افقی در ارتفاع ۱.



- **نه باز و نه بسته** در صفحهٔ مختلط.
- **همبند:** چون یک خط پیوسته است.

۴. $\Im z > 1$

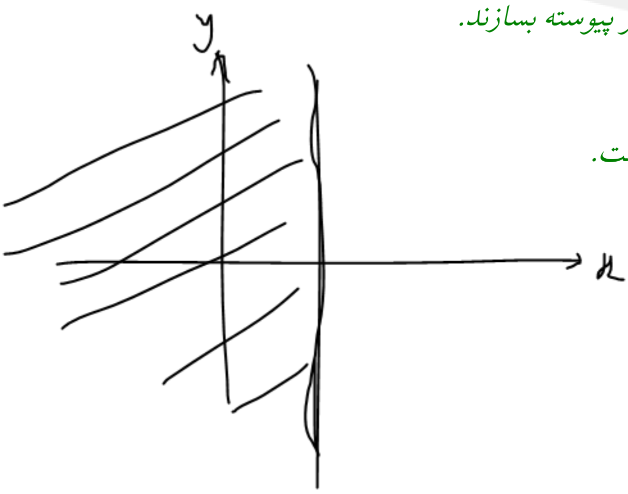
نیم‌صفحهٔ بالای خط $y = 1$.

- **باز.**
- **بسته نیست.**
- **همبند:** چون یک ناحیهٔ پیوسته است.

۵. $0 \leq \arg z \leq \pi/4, \ z \neq 0$

این مجموعه یک ناحیهٔ زاویه‌ای (sector) بین دو نیم‌خط با زاویه‌های ۰ و $\pi/4$ است که **نقطهٔ مبدأ حذف شده.**

- **نه باز:** چون دو نیم‌خط مرزی داخل مجموعه‌اند.
- **نه بسته:** چون مبدأ (که در مرز است) حذف شده.
- **همبند:** چون بردارها از هر نقطه درون ناحیه می‌توانند مسیر پیوسته بسازند.



۶. $|z - 4| \geq |z|$

با حل نامساوی داریم $2 \geq x$، که نیم‌صفحهٔ چپ خط $x = 2$ است.

- **بسته:** چون خط مرزی $x = 2$ داخل مجموعه است.
- **باز نیست.**
- **همبند.**

مجموعه‌های «باز و نه بسته» *فقط دو مجموعه شرایط «باز و نه بسته» را دارند:*

$\boxed{(۲) \text{ و } (۴)}$

تمرین ۱۲. *در هر یک از حالتهای زیر، بستار مجموعه را با شکل نمایش دهید:*

۱. $-\pi < \arg z < \pi$ با شرط $z \neq ۰$.

۲. نامساوی $|\Re z| < |z|$.

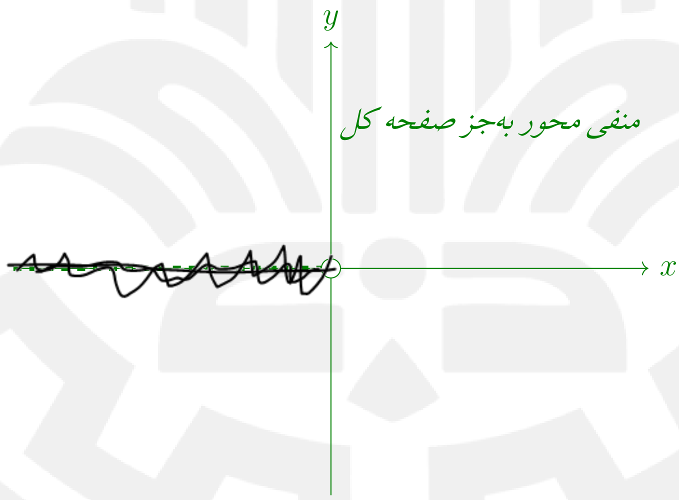
۳. نامساوی $\Re(۱/z) \leq ۱/۲$.

۴. نامساوی $\Re(z^۲) > ۰$.

پاسخ ۱۲.

۱. $-\pi < \arg z < \pi$ با شرط $z \neq ۰$.

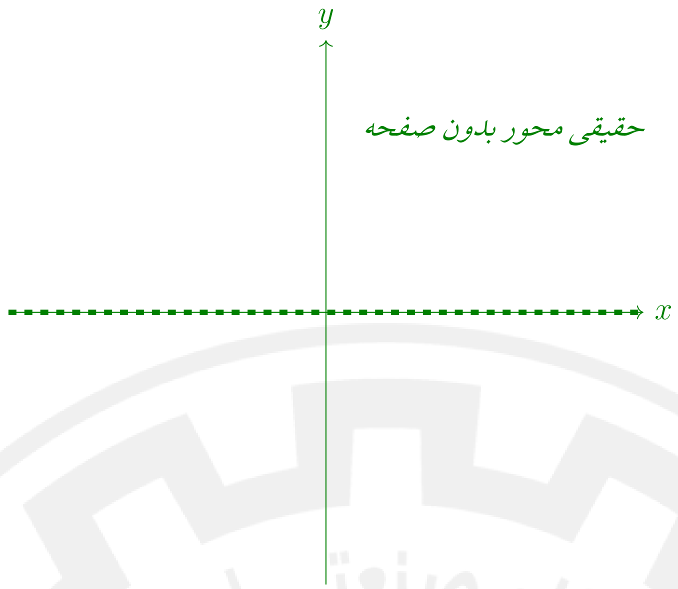
پاسخ: *این مجموعه تمام صفحه‌ی مختلط است به‌جز محور حقیقی منفی و نقطه‌ی صفر. بستار آن کل صفحه است.*



$x < \sqrt{x^2+y^2}$

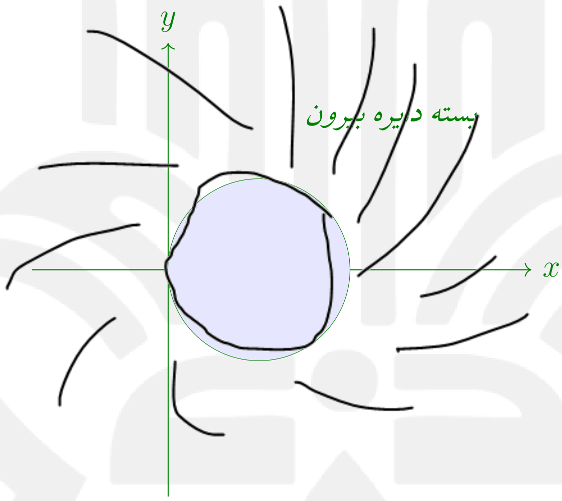
۲. نامساوی $|\Re z| < |z|$.

پاسخ: *اگر $z = x + iy$ باشد، نامساوی به $y \neq ۰$ تبدیل می‌شود. پس کل صفحه منهای محور حقیقی است. بستار آن کل صفحه است.*



۳. نامساوی $\Re(1/z) \le 1/2$.

پاسخ: نامساوی به صورت $(x-1)^2+y^2 \ge 1$ در می‌آید. پس مجموعه بیرون یک دیسک به مرکز $(1,0)$ و شعاع ۱ است. بستار آن شامل مرز دایره است.

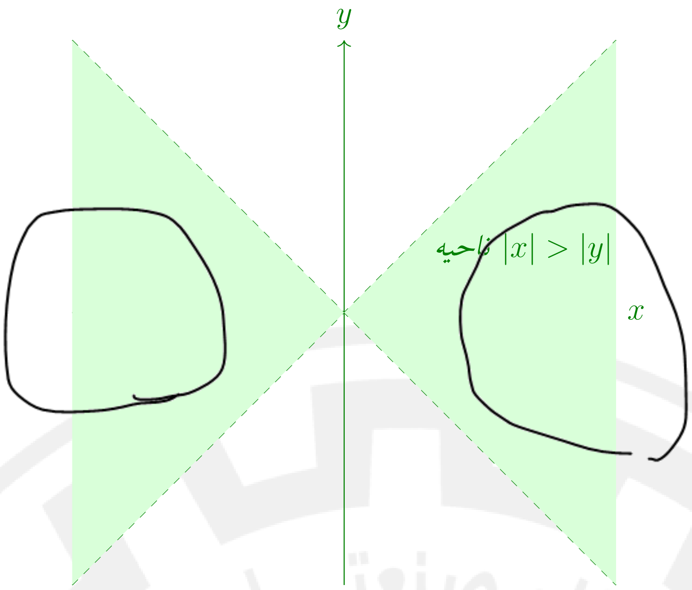


۴. نامساوی $\Re(z^2) > 0$.

$(x+iy)(x+iy)$

پاسخ: برای $z = x+iy$ داریم $\Re(z^2) = x^2 - y^2$ و شرط $x^2 - y^2 > 0$ یعنی $|y| < |x|$. این دو ناحیه‌ی باز بین خطوط $y = x$ و $y = -x$ است. بستار آن $|y| \le |x|$ است.

$$\underbrace{x^2 - y^2}_{>0} + i(2xy)$$



تمرین ۱۳. سه محاسبهٔ زیر دیدگاهی نسبت به قضیهٔ کوشی به ما می‌دهند.

۱. انتگرال‌های $\int_\gamma z^n\, dz$ را برای تمام اعداد صحیح n محاسبه کنید. در این‌جا γ هر دایره‌ای با مرکز مبدأ و جهت مثبت (پادساعتگرد) است.

۲. همان سؤال قبل، اما این بار γ هر دایره‌ای است که مبدأ را دربر نگیرد.

۳. نشان دهید اگر $|a| < r < |b|$ باشد، آنگاه $\int_\gamma \frac{۱}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{۲\pi i}{a-b}$، که در آن γ دایره‌ای با مرکز مبدأ و شعاع r و جهت مثبت است.

پاسخ ۱۳.

۱. بگذارید γ دایره‌ای باشد که با پارامترگذاری $z(t) = re^{it}$ برای $t \in [۰, ۲\pi]$ داده می‌شود. در این حالت $dz = ire^{it}\, dt$ و $z^n = r^n e^{int}$ است. بنابراین $\int_\gamma z^n\, dz = \int_۰^{۲\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\, dt = ir^{n+۱} \int_۰^{۲\pi} e^{i(n+۱)t}\, dt$.

اگر $n \neq -۱$ باشد، انتگرال $e^{i(n+۱)t}$ روی بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ برابر صفر است؛ پس $\int_\gamma z^n\, dz = ۰$. اما اگر $n = -۱$ باشد، تابع زیرانتگرال برابر ۱ است و داریم $\int_\gamma z^{-۱}\, dz = i \int_۰^{۲\pi} dt = ۲\pi i$.

$\int \frac{dz}{z} = \int_۰^{۲\pi} \frac{r i e^{i\theta}\, d\theta}{r e^{i\theta}} = ۲\pi i$

۲. اگر γ دایره‌ای باشد که مبدأ را دربر نگیرد، آنگاه تابع z^n برای هر عدد صحیح n درون و روی γ هولومورف است. بنابراین بر اساس قضیهٔ کوشی، انتگرال z^n روی γ برای تمام n برابر صفر است.

۳. از تجزیهٔ کسرهای جزئی استفاده می‌کنیم: $۱/((z-a)(z-b)) = \frac{۱}{a-b}(۱/(z-a) - ۱/(z-b))$. پس $\int_\gamma \frac{۱}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{۱}{a-b}\left(\int_\gamma \frac{۱}{z-a}\, dz - \int_\gamma \frac{۱}{z-b}\, dz\right)$.

چون $|a| < r$، نقطهٔ a داخل دایرهٔ γ قرار می‌گیرد؛ از این رو $\int_\gamma (z-a)^{-۱}\, dz = ۲\pi i$. چون $|b| > r$، نقطهٔ b بیرون γ قرار دارد و بنابراین $\int_\gamma (z-b)^{-۱}\, dz = ۰$.

با ترکیب این نتایج می‌رسیم به: $\int_\gamma \frac{۱}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{۲\pi i}{a-b}$.

تمرین ۱۴. تابع f را روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر بگیرید: $f(x)=0$ اگر $x\le 0$، و $f(x)=e^{-1/x^2}$ اگر $x>0$.
نشان دهید که f روی $\mathbb{R}$ نامتناهی‌بار مشتق‌پذیر است و اینکه $f^{(n)}(0)=0$ برای تمام $n\ge 1$ برقرار است. نتیجه بگیرید که f برای xهای نزدیک مبدأ بسط توانی همگرا $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ندارد.

$f(x)=\sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n=0$

پاسخ ۱۴. روی بازهٔ $(-\infty,0)$ تابع به‌طور کامل صفر است؛ بنابراین در آن ناحیه یک تابع نرم (نامتناهی‌بار مشتق‌پذیر) است. روی $(0,\infty)$ این تابع ترکیبی از توابع نرم است، و در نتیجه در آن بازه نیز بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است.
حال باید مشتق‌پذیری در 0 را بررسی کنیم. برای $x>0$، با مشتق‌گیری‌های پیاپی می‌توان نشان داد که $f^{(n)}(x)$ را می‌توان به صورت $f^{(n)}(x)=P_n(1/x)\,e^{-1/x^2}$ نوشت، که در آن P_n یک چندجمله‌ای است. از آن‌جا که e^{-1/x^2} هنگامی که $x\to 0^+$ می‌رود، سریع‌تر از هر توانی از $1/x$ به صفر میل می‌کند، نتیجه می‌گیریم که $\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x)=0$ برای هر $n\ge 0$.
برای $x<0$، تمام مشتق‌های f همواره صفر هستند. بنابراین کرانهٔ راست و کرانهٔ چپ $f^{(n)}(x)$ در نقطهٔ 0 هر دو وجود داشته و برابر صفرند، که نشان می‌دهد $f^{(n)}$ در 0 پیوسته است و $f^{(n)}(0)=0$ برای تمام $n\ge 1$ برقرار است. در نتیجه f روی $\mathbb{R}$ بی‌نهایت‌بار مشتق‌پذیر است و برای همهٔ $n\ge 1$ داریم $f^{(n)}(0)=0$.
اکنون فرض کنید f در نزدیکی صفر دارای یک بسط توانی همگرا باشد، یعنی $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $|x|<r$.
در این صورت داریم $a_n=f^{(n)}(0)/n!$ برای همهٔ n، پس $a_n=0$ برای تمام n. این نتیجه می‌دهد که این سری توانی در همسایگی صفر برابر با صفر است، که با این واقعیت که $f(x)=e^{-1/x^2}>0$ برای $x>0$ تناقض دارد.
پس تابع f در نزدیکی مبدأ بسط توانی همگرا ندارد.

تمرین ۱۵. نشان دهید که مشتق $f'(z)$ در هیچ نقطه‌ای موجود نیست اگر:

(الف) $f(z)=\bar z$

(ب) $f(z)=z-\bar z$

(ج) $f(z)=x+ixy^2$ (با $z=x+iy$)

(د) $f(z)=e^x e^{-iy}$ (با $z=x+iy$)

پاسخ ۱۵. برای هر تابع، مشتق‌پذیری مختلط در یک نقطه معادل برقرار بودن معادلات کوشی–ریمان است. نشان می‌دهیم که در هیچ‌یک از این چهار حالت معادلات برقرار نمی‌شوند.

(الف) اگر $z=x+iy$، آن‌گاه $f(z)=\bar z=x-iy$. پس $u=x$ و $v=-y$. مشتقات: $u_x=1$، $u_y=0$، $v_x=0$، $v_y=-1$. معادلهٔ کوشی–ریمان اول می‌گوید $u_x=v_y$ یعنی $1=-1$ که نادرست است. پس تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

(ب) داریم $z-\bar z=2iy$. پس $u=0$ و $v=2y$. مشتقات: $u_x=0$، $u_y=0$، $v_x=0$، $v_y=2$. معادلهٔ اول $u_x=v_y$ یعنی $0=2$، که نادرست است. پس تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

(ج) تابع برابر $f(z) = x + ixy^۲$ است، پس $u = x$ و $v = xy^۲$. مشتقات: $u_x = ۱$، $u_y = ۰$، $v_x = y^۲$، $v_y = ۲xy$. معادلات کوشی—ریمان می‌گویند $u_x = v_y$ یعنی $۱ = ۲xy$ و نیز $u_y = -v_x$ یعنی $۰ = -y^۲$. دومی تنها وقتی برقرار است که $y = ۰$، اما در آن صورت اولی می‌شود $۱ = ۰$ که ناسازگار است. پس تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

(د) می‌نویسیم $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$، پس $f(z) = e^x(\cos y - i\sin y)$ و در نتیجه $u = e^x\cos y$ و $v = -e^x \sin y$. مشتقات: $u_x = e^x\cos y$، $u_y = -e^x\sin y$، $v_x = -e^x\sin y$، $v_y = -e^x\cos y$.

معادلهٔ $u_x = v_y$ می‌گوید $e^x\cos y = -e^x\cos y$ پس $\cos y = ۰$. معادلهٔ $u_y = -v_x$ می‌گوید $-e^x\sin y = e^x\sin y$ پس $\sin y = ۰$. اما $\sin y = ۰$ و $\cos y = ۰$ نمی‌توانند همزمان برقرار باشند. بنابراین تابع در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست.

تمرین ۱۶. فرض کنید u و v معرف مؤلفه‌های حقیقی و موهومی تابع f باشند که با ضابطه‌های زیر تعریف شده است:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^۲}{z}, & z \neq ۰, \\ ۰, & z = ۰. \end{cases}$$

تحقیق کنید که معادلات کوشی—ریمان $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ در مبدأ $z = (۰,۰)$ برقرارند.

پاسخ ۱۶. برای $z = x + iy$ داریم $\overline{z} = x - iy$ و بنابراین برای $z \neq ۰$ داریم $f(z) = \dfrac{\overline{z}^۲}{z} = \dfrac{(x-iy)^۲}{x+iy}$. با ساده‌سازی می‌توان نشان داد که $f(z) = x - ۳y + i(۳x - y)$ برای تمام $z \neq ۰$، اما چون این تابع در نقطهٔ $z = ۰$ تعریف ویژه دارد، برای بررسی مشتقات جزئی در مبدأ باید از تعریف حدی مشتقات جزئی استفاده کنیم.

چون $f(۰) = ۰$، مؤلفهٔ حقیقی و موهومی در مبدأ برابر $u(۰,۰) = ۰$ و $v(۰,۰) = ۰$ هستند. اکنون مشتقات جزئی در مبدأ را به روش حدی حساب می‌کنیم.

برای مشتق $u_x(۰,۰)$ تعریف داریم $u_x(۰,۰) = \lim_{h\to۰} \dfrac{u(h,۰) - u(۰,۰)}{h}$. برای $h \neq ۰$ مقدار تابع برابر $f(h) = \dfrac{h^۲}{h} = h$ (زیرا h حقیقی است)، پس $u(h,۰) = h$ و نتیجه می‌شود $u_x(۰,۰) = \lim_{h\to۰} \dfrac{h}{h} = ۱$.

به همان روش برای $v_y(۰,۰)$ داریم $v_y(۰,۰) = \lim_{k\to۰} \dfrac{v(۰,k) - v(۰,۰)}{k}$. اگر $z = ik$ باشد (یعنی روی محور موهومی)، آنگاه $f(ik) = \dfrac{(-ik)^۲}{ik} = \dfrac{-k^۲}{ik} = ik$، پس $v(۰,k) = k$ و نتیجه می‌شود $v_y(۰,۰) = \lim_{k\to۰} \dfrac{k}{k} = ۱$.

اکنون مشتقات دیگر را حساب می‌کنیم. برای $u_y(۰,۰)$ از $u_y(۰,۰) = \lim_{k\to۰} \dfrac{u(۰,k) - ۰}{k}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به مقدار بالا برای $f(ik) = ik$ داریم $u(۰,k) = ۰$، پس $u_y(۰,۰) = ۰$.

همچنین برای $v_x(۰,۰)$ از $v_x(۰,۰) = \lim_{h\to۰} \dfrac{v(h,۰) - ۰}{h}$ استفاده می‌کنیم. چون برای h حقیقی داشتیم $f(h) = h$، پس $v(h,۰) = ۰$ و بنابراین $v_x(۰,۰) = ۰$.

اکنون معادلات کوشی—ریمان را در مبدأ بررسی می‌کنیم: رابطهٔ نخست $u_x = v_y$ برقرار است زیرا $u_x(۰,۰) = ۱$ و $v_y(۰,۰) = ۱$. رابطهٔ دوم $u_y = -v_x$ نیز برقرار است زیرا $u_y(۰,۰) = ۰$ و $-v_x(۰,۰) = ۰$.

بنابراین معادلات کوشی—ریمان در مبدأ برقرار هستند.