آنالیز مختلط

سلام. روز بخیر
امروز شنبه ۱۴۰۵/۲/۱۹

مهریار علوی

تمرین سری ۲

سلام

تمرین ۱. *فرض کنید $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ یک چندجمله‌ای باشد. نشان دهید P به عوامل درجه اول و درجه دوم تجزیه می‌شود.*

$K[x]=\{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \mid a_i\in K,\ n\in\mathbb{N}\}$ $x^3-1=0$ $z=x+iy$

$\mathbb{R}[x] \to f(x)\in\mathbb{R}[x]$ $f=\sqrt{2}+3x^2$ $(x-a)(x^2+px+q)$ $\bar z=x-iy$

پاسخ ۱. برای یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی مانند $P(x)$، ریشه‌ها یا حقیقی هستند یا به صورت زوج‌های مزدوج مختلط ظاهر می‌شوند. یعنی اگر $z \in \mathbb{C}$ یک ریشه باشد، آنگاه $\bar{z}$ نیز ریشه است. هر ریشهٔ حقیقی x_k متناظر با یک عامل خطی $(x-x_k)$ است. همچنین هر جفت ریشهٔ مزدوج مختلط $z=\alpha+i\beta$ و $\bar z=\alpha-i\beta$ با شرط $\beta \neq 0$، یک عامل درجهٔ دوم تجزیه‌ناپذیر با ضرایب حقیقی ایجاد می‌کند، زیرا $(x-z)(x-\bar z)=x^2-(z+\bar z)x+z\bar z$. از آنجا که $z+\bar z=2\alpha$ و $z\bar z=\alpha^2+\beta^2$ اعداد حقیقی هستند، به دست می‌آید $(x-z)(x-\bar z)=x^2-2\alpha x+(\alpha^2+\beta^2)$. این یک عبارت درجهٔ دوم با دلتای منفی است، زیرا $\Delta=(-2\alpha)^2-4(\alpha^2+\beta^2)=-4\beta^2<0$. بنابراین هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی به حاصل‌ضرب عوامل خطی و عوامل درجهٔ دوم تجزیه‌ناپذیر روی دستگاه اعداد حقیقی تجزیه می‌شود. به عنوان مثال می‌توان نوشت $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x^2+ax+b)$ به‌طوری‌که $\Delta=a^2-4b<0$.

$\Delta<0$

تمرین ۲. *انتگرال زیر را روی مسیر C (مستطیل با رئوس $\pm 2 \pm 2i$) در جهت پادساعتگرد محاسبه کنید.*

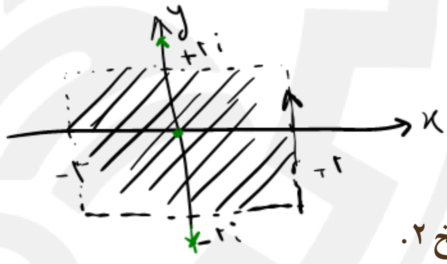
$z=0$

$z^2+8=0$

$z=\pm i2\sqrt{2}$

$z_1, z_2=\pm i2\sqrt{2}$

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,dz$$



پاسخ ۲.

برای حل این انتگرال از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه، مقدار انتگرال یک تابع تحلیلی حول یک مسیر بسته برابر است با $2\pi i$ ضربدر مجموع مانده‌های تابع در نقاط تکین داخل مسیر.

ابتدا نقاط تکین را می‌یابیم. تابع برابر است با $f(z)=\frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}$. نقاط تکین ریشه‌های مخرج هستند، یعنی از معادله $z(z^2+8)=0$. بنابراین سه ریشه به دست می‌آید: $z_1=0$ و از رابطه $z^2+8=0$ داریم $z^2=-8$ و در نتیجه $z=\pm 2\sqrt{2}i$، یعنی $z_2=2\sqrt{2}i$ و $z_3=-2\sqrt{2}i$. هر سه نقطه قطب ساده هستند.

اکنون موقعیت این نقاط نسبت به مسیر C را بررسی می‌کنیم. مسیر C مستطیلی است که به وسیلهٔ خطوط $x=\pm 2$ و $y=\pm 2$ محدود شده است. نقطهٔ $z_1=0$ در مبدأ قرار دارد، پس داخل مسیر است. از آنجا که $2\sqrt{2}\approx 2.828>2$، نقطهٔ $z_2=2\sqrt{2}i$ بالای مستطیل و خارج از مسیر قرار دارد. همچنین چون $-2.828<-2$، نقطهٔ $z_3=-2\sqrt{2}i$ پایین مستطیل و خارج از مسیر است. بنابراین تنها قطب داخل مسیر، نقطهٔ $z=0$ است.

Residue

$a_n(z-z_0)^n + \cdots + a_{-1}$

برای محاسبهٔ مانده در قطب ساده z_0 از فرمول $\mathrm{Res}(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ استفاده می‌کنیم. در اینجا برای $z_0=0$ داریم $\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to 0}(z)\frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}=\lim_{z\to 0}\frac{\cos(z)}{z^2+8}$. با جایگذاری مستقیم $z=0$ نتیجه می‌شود $\mathrm{Res}(f,0)=\frac{\cos(0)}{8}=\frac{1}{8}$. اکنون طبق قضیهٔ مانده‌ها داریم

$a_{-1}=f(z_0)$

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,dz = 2\pi i \times \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

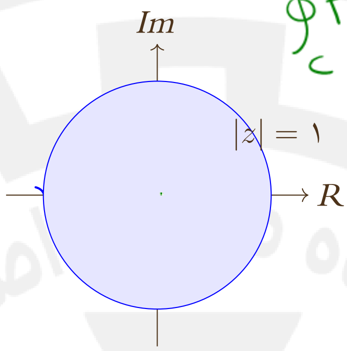
$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$

تمرین ۳. اگر $f(z) = e^{z^۲}$ باشد، مقدار انتگرال $\oint_C f(z)dz$ روی مسیر بسته دایره‌ای $|z| = ۱$ چقدر است؟ چرا؟

entire

پاسخ ۳. تابع $f(z) = e^{z^۲}$ ترکیب توابع تام است و بنابراین خود یک تابع تام (تحلیلی در تمام صفحه مختلط) است. طبق قضیه انتگرال کوشی، انتگرال یک تابع تحلیلی روی هر مسیر بسته در یک ناحیه همبند ساده برابر با صفر است. بنابراین مقدار این انتگرال ۰ است.

$\oint_C f(z)\,dz = ۰$



مسیر بسته و ناحیه تحلیلی

$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

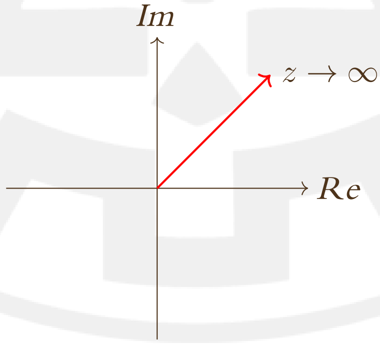
تمرین ۴. با توجه به اینکه می‌دانیم تابع $f(z) = z$ یک تابع تام (تحلیلی در کل صفحه مختلط) و غیرثابت است، طبق قضیه لیوویل چه نتیجه‌ای درباره کرانداری این تابع می‌توان گرفت؟

قضیه لیوویل:

f تام ∧ کراندار ⇐ f ثابت است

f نا ثابت ⇒ ناکراندار ∨ ناتام

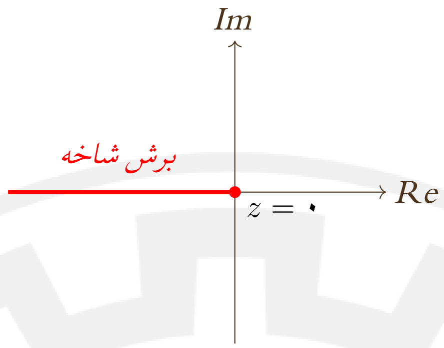
پاسخ ۴. قضیه لیوویل بیان می‌کند که تنها توابع تام و کراندار، توابع ثابت هستند. از آنجا که تابع $f(z) = z$ تام است اما ثابت نیست، نتیجه می‌گیریم که این تابع در صفحه مختلط ناکراندار است. (وقتی $|z| \to \infty$، مقدار $|f(z)|$ نیز به بی‌نهایت میل می‌کند).



ناکرانداری تابع در بی‌نهایت

تمرین ۵. فرمول محاسبه مقدار اصلی لگاریتم مختلط یعنی $Log(z)$ چیست و برش شاخه استاندارد آن روی کدام قسمت از صفحه مختلط قرار دارد؟

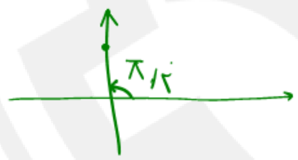
پاسخ ۵. مقدار اصلی لگاریتم مختلط به صورت $Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$ تعریف می‌شود، که در آن $Arg(z)$ زاویه اصلی نقطه z در بازه $(-\pi, \pi]$ است. نقطه شاخه آن در مبدا $z = ۰$ قرار دارد و برش شاخه استاندارد آن نیم‌محور حقیقی منفی (شامل خود مبدا) یعنی $z = x + i۰$ به شرط $x \leq ۰$ است.



تمرین ۶. بر اساس تعریف پایه، توان مختلط a^b (که در آن a و b اعداد مختلط هستند و $a \neq ۰$) چگونه به کمک توابع لگاریتم و نمایی فرمول‌بندی می‌شود؟

پاسخ ۶. توان مختلط به صورت چندمقدار تعریف می‌شود و فرمول کلی آن با استفاده از تابع نمایی و لگاریتم مختلط به صورت $a^b = e^{b\log(a)}$ بیان می‌گردد که در آن $\log(a)$ نمایانگر لگاریتم عمومی است. اگر از مقدار اصلی لگاریتم استفاده کنیم، مقدار اصلی توان به دست می‌آید.

$$a \xrightarrow{\log} \log(a) \xrightarrow{\times b} b\log(a) \xrightarrow{\exp} e^{b\log(a)} = a^b$$



تمرین ۷. مقدار اصلی و مقادیر عمومی عبارت i^i را محاسبه کنید.

پاسخ ۷. در ابتدا یادآوری می‌کنیم که توان مختلط برای پایه و توان مختلط به صورت فرمول $a^b = e^{b\log(a)}$ تعریف می‌شود. در این مسئله $a = i$ و $b = i$ است، بنابراین $i^i = e^{i\log(i)}$.
ابتدا باید مقدار لگاریتم عمومی $\log(i)$ را پیدا کنیم. برای عدد مختلط $z = i$، اندازه برابر با $|i| = ۱$ و آرگومان عمومی برابر با $\arg(i) = \frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$ برای $k \in \mathbb{Z}$ است. پس لگاریتم عمومی i به صورت $\log(i) = \ln|i| + i\arg(i) = \ln(۱) + i\left(\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi\right)$ محاسبه می‌شود.

$\log(z) = \log(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta \qquad i = e^{i\pi/2}$

حالا این مقدار را در فرمول اصلی جایگذاری می‌کنیم: $i^i = e^{i\cdot\left[i\left(\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\right)\right]} = e^{i^۲\left(\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{۲}+۲k\pi\right)}$. بنابراین، مقادیر عمومی عبارت داده شده به صورت $i^i = e^{-\frac{\pi}{۲}-۲k\pi}$ برای $k \in \mathbb{Z}$ به دست می‌آیند. نکته جالب این است که تمام مقادیر i^i اعدادی کاملاً حقیقی هستند.
برای یافتن مقدار اصلی، از شاخه اصلی لگاریتم استفاده می‌کنیم (یعنی $k = ۰$ را قرار می‌دهیم). در این حالت مقدار اصلی لگاریتم برابر است با $Log(i) = i\frac{\pi}{۲}$. بنابراین، مقدار اصلی توان مختلط برابر است با $e^{i\cdot Log(i)} = e^{i\cdot(i\frac{\pi}{۲})} = e^{-\frac{\pi}{۲}}$. این مقدار تقریباً برابر با $e^{-۱/۵۷۰۸} \approx ۰/۲۰۷۸۸$ است.

$(-\pi, +\pi]$

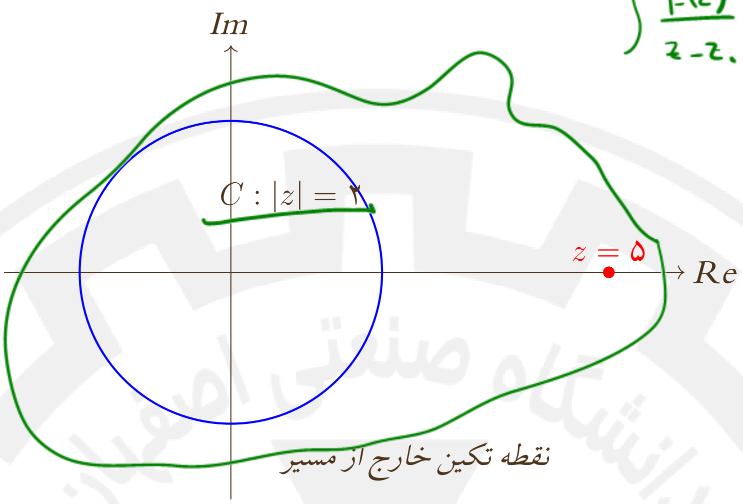
تمرین ۸. در انتگرال $\oint_C \frac{\sin(z)}{z-۵}dz$ اگر مسیر C دایره $|z| = ۲$ باشد، مقدار انتگرال چقدر است؟

$f(z) = \dfrac{\ln z}{(z-5)}$ $\quad z = 5$ تکینگی ساده

پاسخ ۸. برای حل این انتگرال باید به مخرج کسر نگاه کنیم تا نقاط تکین را بیابیم. ریشه مخرج نقطه $z = ۵$ است. از طرفی مسیر انتگرال‌گیری ما دایره‌ای به مرکز مبدا و شعاع ۲ است. چون نقطه $z = ۵$ خارج از این مسیر قرار دارد، تابع داخل انتگرال در روی مسیر و درون آن کاملاً تحلیلی است. طبق قضیه انتگرال کوشی، مقدار انتگرال صفر است.

$\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$

$= 2\pi i\, \sin(5)$



$i = re^{i\theta} = 1e^{i\pi/2}$

$-i = 1e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2}$ آرگومان اصلی

$\cancel{\log(-1)}$

تمرین ۹. مقدار اصلی و مقدار عمومی عبارت $\log(-i)$ را محاسبه کنید.

پاسخ ۹. پیش از حل، تعاریف را مرور می‌کنیم: مقدار عمومی لگاریتم برای یک عدد مختلط مانند z به صورت $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$ تعریف می‌شود که در آن $\arg(z) = Arg(z) + ۲k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$ است. مقدار اصلی لگاریتم نیز با در نظر گرفتن آرگومان اصلی (که معمولاً در بازه $(-\pi, \pi]$ قرار دارد) به صورت $Log(z) = \ln|z| + iArg(z)$ به دست می‌آید.

$\log(re^{i\theta}) = \log r + \log e^{i\theta} = \ln r + i\theta \to Arg(z)$

برای محاسبه $\log(-i)$، ابتدا عدد مختلط $z = -i$ را به فرم قطبی می‌نویسیم: $z = re^{i\theta}$. قدر مطلق آن برابر است با $r = |-i| = \sqrt{۰^۲ + (-۱)^۲} = ۱$ و زاویه $-i$ با محور حقیقی مثبت برابر با $-\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد. پس مقدار اصلی آرگومان $Arg(-i) = -\frac{\pi}{۲}$ است. بنابراین، آرگومان عمومی به صورت $\arg(-i) = -\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi$ برای هر $k \in \mathbb{Z}$ است.

با جایگذاری این مقادیر برای $z = -i$ در فرمول لگاریتم عمومی داریم: $\log(-i) = \ln(۱) + i\left(-\frac{\pi}{۲} + ۲k\pi\right) = ۰ + i\left(۲k\pi - \frac{\pi}{۲}\right)$. این عبارت، مجموعه‌ای بی‌نهایت از مقادیر لگاریتم را برای $-i$ نشان می‌دهد. در نتیجه، مقدار عمومی برابر است با $\log(-i) = i\frac{(۴k-۱)\pi}{۲}$ که در آن $k \in \mathbb{Z}$ می‌باشد.

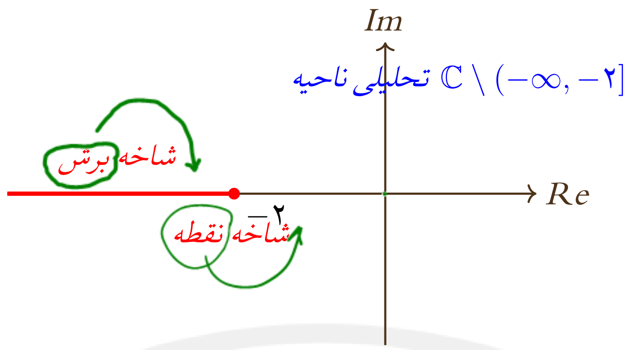
همچنین مقدار اصلی لگاریتم، با قرار دادن $k = ۰$ در فرمول عمومی (یا استفاده مستقیم از آرگومان اصلی) محاسبه می‌شود: $Log(-i) = \ln(۱) + iArg(-i) = ۰ + i\left(-\frac{\pi}{۲}\right) = -\frac{\pi i}{۲}$.

تمرین ۱۰. ناحیه‌ای از صفحه مختلط را بیابید که در آن تابع $f(z) = Log(z + ۲)$ تحلیلی باشد. نقاط شاخه و برش شاخه این تابع را مشخص کنید.

پاسخ ۱۰. در ابتدا با رسم یک شکل و بیان تعاریف، نقطه شاخه و برش شاخه تابع را مشخص می‌کنیم:

$f = Log(z+۲)$

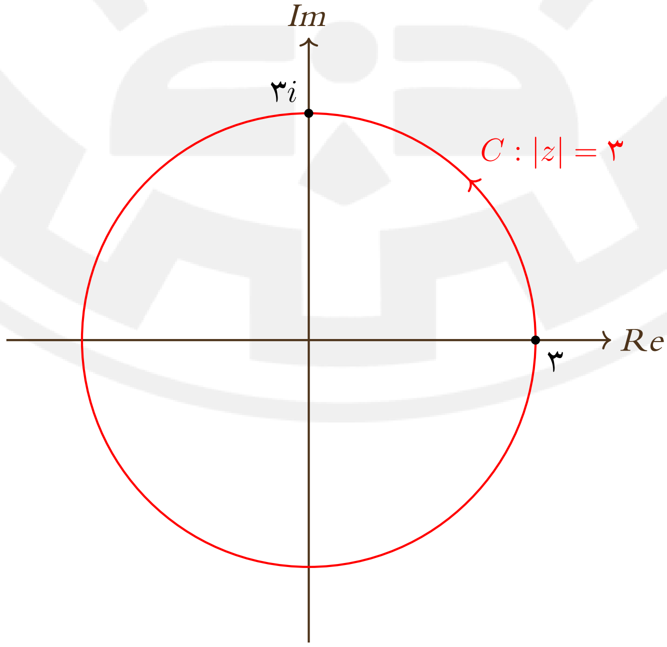
نقطه شاخه و برش شاخه



نقطه شاخه نقطه‌ای است که در آن عبارت درون لگاریتم صفر می‌شود و برش شاخه، نیم‌خط یا منحنی است که برای تک‌مقداره کردن تابع و رفع ابهام چندمقداری بودن، از دامنه صفحه مختلط حذف می‌گردد.
تابع استاندارد $Log(w)$ در همه جا تحلیلی است به جز نقاطی که w روی محور حقیقی غیرمثبت قرار دارد، یعنی $w \in (-\infty, ۰]$. در این حالت، $w = ۰$ نقطه شاخه و $w \in (-\infty, ۰)$ برش شاخه است. در مسئله ما، متغیر تابع لگاریتم $w = z + ۲$ است. بنابراین، تابع $f(z) = Log(z + ۲)$ در نقاطی تحلیلی نیست که $z + ۲$ روی محور حقیقی غیرمثبت قرار گیرد. یعنی $z + ۲ \in (-\infty, ۰]$ که نتیجه می‌دهد $z + ۲ \leq ۰$ و در نهایت $z \leq -۲$. این نامساوی، نقاطی از محور حقیقی را نشان می‌دهد که از -۲ شروع شده و تا $-\infty$ امتداد دارند. نقطه شاخه معادل ریشه عبارت درون لگاریتم یعنی $z + ۲ = ۰$ است که نتیجه می‌دهد $z = -۲$. برش شاخه نیز معادل قسمت اکیداً منفی یعنی $z + ۲ < ۰$ است که نتیجه می‌دهد $z < -۲$. بنابراین، تابع $f(z) = Log(z+۲)$ در تمام صفحه مختلط $(\mathbb{C})$ به جز مجموعه $\{z \in \mathbb{R} \mid z \leq -۲\}$ تحلیلی است. این مجموعه غیرتحلیلی شامل نقطه شاخه $z = -۲$ و برش شاخه، یعنی نیم‌خطی است که از $z = -۲$ در امتداد محور حقیقی منفی کشیده شده است.

تمرین ۱۱. مقدار انتگرال $\oint_C z^۲ e^z dz$ را محاسبه کنید، که در آن C دایره‌ای به معادله $|z| = ۳$ است.

پاسخ ۱۱. در ابتدا مسیر انتگرال‌گیری را رسم می‌کنیم:



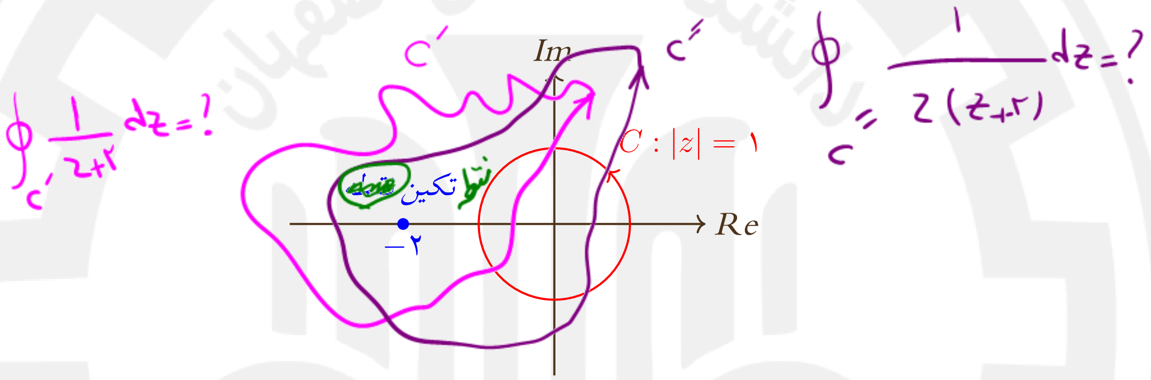
برای محاسبه این انتگرال، نیازی به پارامتری‌سازی مسیر نیست و می‌توانیم از قضیه انتگرال کوشی استفاده کنیم. تابع زیر انتگرال را به صورت $f(z) = z^۲ e^z$ تعریف می‌کنیم.

می‌دانیم که تابع چندجمله‌ای $z^۲$ و تابع نمایی e^z هر دو در تمام صفحه مختلط $\mathbb{C}$ تحلیلی (تام) هستند. از آنجا که حاصل‌ضرب دو تابع تام، یک تابع تام است، تابع $f(z) = z^۲e^z$ نیز در تمام صفحه مختلط تحلیلی است.
بر اساس قضیه انتگرال کوشی، اگر تابعی در یک ناحیه همبند ساده تحلیلی باشد، انتگرال آن روی هر مسیر بسته ساده درون آن ناحیه برابر با صفر است. از آنجا که مسیر C (دایره $|z| = ۳$) یک منحنی بسته ساده است و تابع $f(z)$ در درون و روی این مسیر کاملاً تحلیلی است، نتیجه می‌گیریم که:

$$\oint_C z^۲ e^z dz = ۰$$

تمرین ۱۲. انتگرال $\oint_C \frac{۱}{z+۲}dz$ را محاسبه کنید، که در آن مسیر C دایره واحد $|z| = ۱$ است.

پاسخ ۱۲. در ابتدا مسیر انتگرال‌گیری و موقعیت نقطه تکین را رسم می‌کنیم:

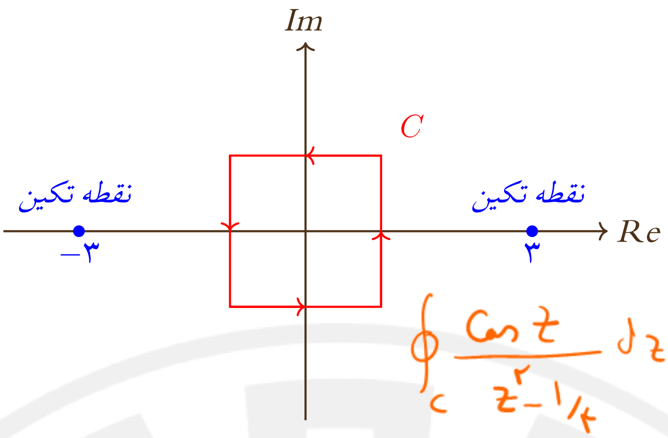


ابتدا نقاط تکین تابع $f(z) = \frac{۱}{z+۲}$ را پیدا می‌کنیم. تابع در جایی که مخرج صفر شود تحلیلی نیست، یعنی $z + ۲ = ۰$ که نتیجه می‌دهد $z = -۲$. بنابراین، تابع دارای یک قطب در نقطه $z = -۲$ است.
حالا باید بررسی کنیم که آیا این نقطه تکین درون مسیر انتگرال‌گیری قرار دارد یا خیر. مسیر انتگرال‌گیری C دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات ($z = ۰$) و شعاع ۱ است (یعنی $|z| = ۱$). فاصله نقطه تکین $z = -۲$ از مبدأ برابر $|-۲| = ۲$ است، که به وضوح بزرگتر از شعاع دایره (۱) می‌باشد.
بنابراین، نقطه تکین $z = -۲$ کاملاً خارج از مسیر C قرار دارد. این بدان معناست که تابع $f(z)$ در درون و روی مسیر بسته C تحلیلی است. بر اساس قضیه کوشی‌ـ گورسا، انتگرال یک تابع تحلیلی روی مسیر بسته صفر است، در نتیجه داریم:

$$\oint_{|z|=۱} \frac{۱}{z+۲}dz = ۰$$

تمرین ۱۳. حاصل انتگرال $\oint_C \frac{\cos(z)}{z^۲-۹}dz$ را بیابید که در آن C مربعی با رئوس $۱+i, -۱+i, -۱-i, ۱-i$ است.

پاسخ ۱۳. در ابتدا مسیر مربعی و موقعیت نقاط تکین را رسم می‌کنیم:



$\oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 1/4} dz = ?$

تابع زیر انتگرال به صورت $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^۲-۹}$ است. صورت کسر، یعنی تابع مثلثاتی $\cos(z)$، یک تابع تام است و در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد. نقاط تکین تابع تنها مربوط به ریشه‌های مخرج است. قرار دادن مخرج برابر صفر یعنی $z^۲ - ۹ = ۰$ نتیجه می‌دهد $z^۲ = ۹$، که ریشه‌های آن $z = ۳$ و $z = -۳$ هستند.

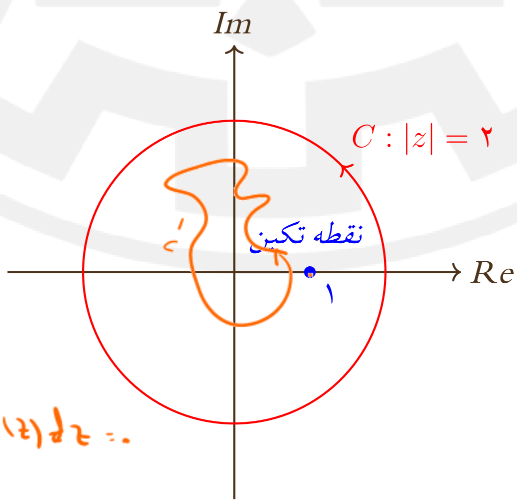
مسیر C مربعی است که رئوس آن در فواصل ۱ واحدی از مبدأ روی محورها قرار دارند. به عبارت دیگر، اضلاع این مربع روی خطوط $x = ۱, x = -۱, y = ۱, y = -۱$ قرار دارند. نقاط تکین $z = ۳$ و $z = -۳$ روی محور حقیقی واقع شده‌اند و فاصله آن‌ها از مبدأ برابر ۳ است. با توجه به ابعاد مربع، مشخص است که هر دو نقطه تکین کاملاً خارج از مرز مربع C قرار گرفته‌اند.

چون هیچ نقطه تکینی داخل یا روی مرز مربع وجود ندارد، تابع $f(z)$ در ناحیه بسته دربرگیرنده مسیر C کاملاً تحلیلی است. در نتیجه، طبق قضیه کوشی_گورسا، مقدار انتگرال برابر با صفر است:

$$\oint_C \frac{\cos(z)}{z^۲ - ۹} dz = ۰$$

تمرین ۱۴. مقدار انتگرال $\oint_C \frac{e^z}{z-۱} dz$ را محاسبه کنید، که در آن C دایره‌ای به معادله $|z| = ۲$ با جهت مثلثاتی (پادساعتگرد) است.

پاسخ ۱۴.



$\oint_{C'} f(z) dz = 0$

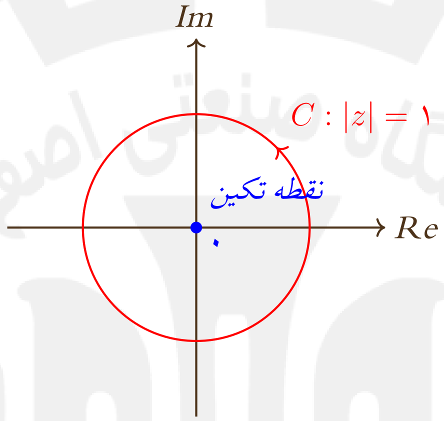
برای محاسبه این انتگرال، ابتدا نقطه تکین تابع زیر انتگرال را با صفر قرار دادن مخرج آن می‌یابیم که نتیجه می‌دهد $z. = ۱$.
با توجه به معادله مسیر C که دایره‌ای به مرکز مبدأ و شعاع ۲ است ($|z| = ۲$)، نقطه تکین $z. = ۱$ درون این مسیر بسته

قرار دارد. از آنجا که تابع صورت کسر یعنی $f(z) = e^z$ یک تابع تام است و در تمام صفحه مختلط تحلیلی می‌باشد، می‌توانیم از فرمول انتگرال کوشی به صورت $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_{۰}}dz = ۲\pi i f(z_{۰})$ استفاده کنیم. با جایگذاری مقادیر $z_{۰} = ۱$ و $f(z) = e^z$ در این فرمول، مقدار انتگرال برابر با $۲\pi i f(۱) = ۲\pi i e^{۱} = ۲\pi e i$ به دست می‌آید. بنابراین، پاسخ نهایی به صورت $\oint_{|z|=۲} \frac{e^z}{z-۱}dz = ۲\pi e i$ خواهد بود.

تمرین ۱۵. انتگرال $\oint_C \frac{\cos(z)}{z^{۳}}dz$ را محاسبه کنید، که در آن مسیر C دایره واحد $|z| = ۱$ است.

قطب سه‌گانه

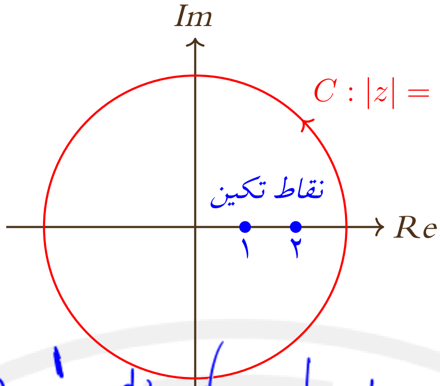
پاسخ ۱۵.



نقطه تکین تابع انتگرال‌ده در جایی است که مخرج کسر صفر شود، یعنی $z_{۰} = ۰$. این نقطه به وضوح درون مسیر دایره واحد با معادله $|z| = ۱$ قرار دارد. از آنجا که مخرج کسر دارای توان ۳ است، تابع انتگرال‌ده به فرم یک قطب مرتبه سوم است و برای محاسبه انتگرال آن باید از فرمول تعمیم‌یافته کوشی برای مشتقات به شکل $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_{۰})^{n+۱}}dz = \frac{۲\pi i}{n!} f^{(n)}(z_{۰})$ استفاده کنیم. در این مسئله، $z_{۰} = ۰$، تابع صورت $f(z) = \cos(z)$ و توان مخرج $n + ۱ = ۳$ است که نتیجه می‌دهد $n = ۲$. تابع صورت یک تابع تام بوده و در همه جا تحلیلی است، بنابراین برای اعمال فرمول، تنها به محاسبه مشتق دوم آن در نقطه $z_{۰} = ۰$ نیاز داریم. با مشتق‌گیری متوالی از تابع صورت داریم $f'(z) = -\sin(z)$ و سپس مشتق دوم برابر با $f''(z) = -\cos(z)$ می‌شود که مقدار آن در مبدأ به صورت $f''(۰) = -\cos(۰) = -۱$ به دست می‌آید. در نهایت، با قرار دادن این مقادیر در فرمول تعمیم‌یافته کوشی، مقدار انتگرال برابر با $\frac{۲\pi i}{۲!} f''(۰) = \frac{۲\pi i}{۲}(-۱) = -\pi i$ محاسبه می‌گردد و در نتیجه پاسخ مسئله $\oint_{|z|=۱} \frac{\cos(z)}{z^{۳}}dz = -\pi i$ خواهد بود.

تمرین ۱۶. حاصل انتگرال $\oint_C \frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}dz$ را بیابید که در آن C دایره $|z| = ۳$ است.

پاسخ ۱۶.



$$\oint_c \frac{1}{(z-1)(z-2)}dz = ?$$

$$= \oint_c \left(\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\right)dz = \oint_c \frac{1}{z-1}dz + \oint_c \frac{1}{z-2}dz = 0$$

برای محاسبه این انتگرال، ابتدا نقاط تکین تابع زیر انتگرال را با یافتن ریشه‌های مخرج تعیین می‌کنیم که $z=۱$ و $z=۲$ به دست می‌آیند. هر دو نقطه در فاصله کمتر از ۳ از مبدأ قرار دارند ($|۱|<۳$ و $|۲|<۳$)، بنابراین هر دو نقطه درون مسیر بسته C با معادله $|z|=۳$ واقع شده‌اند. چون دو نقطه تکین مجزا داریم، می‌توانیم کسر را با استفاده از روش تجزیه کسرها جدا کنیم. با در نظر گرفتن تساوی $\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{A}{z-۱}+\frac{B}{z-۲}$ و هم‌مخرج کردن، به رابطه $۱=A(z-۲)+B(z-۱)$ می‌رسیم. با قرار دادن $z=۱$ نتیجه می‌شود $A=-۱$ و با قرار دادن $z=۲$ نتیجه می‌شود $B=۱$. پس تابع به صورت $\frac{۱}{(z-۱)(z-۲)}=\frac{۱}{z-۲}-\frac{۱}{z-۱}$ تجزیه می‌شود. حالا انتگرال را به دو بخش $\oint_{|z|=۳}\frac{۱}{z-۲}dz-\oint_{|z|=۳}\frac{۱}{z-۱}dz$ تقسیم می‌کنیم. برای هر دو انتگرال، تابع صورت کسر $f(z)=۱$ است که یک تابع تام می‌باشد. با اعمال فرمول انتگرال کوشی برای هر کدام به طور جداگانه، برای انتگرال اول با $z_۰=۲$ مقدار $۲\pi i f(۲)=۲\pi i$ و برای انتگرال دوم با $z_۰=۱$ مقدار $۲\pi i f(۱)=۲\pi i$ به دست می‌آید. در نهایت، با کم کردن این مقادیر از یکدیگر یعنی $\underbrace{۲\pi i-۲\pi i=۰}$، حاصل انتگرال برابر صفر خواهد بود.

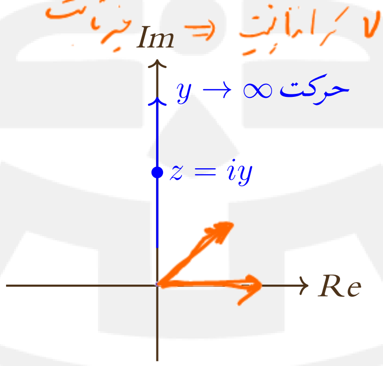
اگر تابع f درون و روی c تحلیلی باشد: $\oint_c f(z)dz=۰$

تمرین ۱۷. نشان دهید تابع $f(z)=\sin(z)$ که یک تابع تام است، در صفحه مختلط ناکراندار است.

پاسخ ۱۷.

کلی $\wedge$ کراندار $\Leftarrow$ ثابت

کلی نیست $\vee$ کراندار نیست $\Leftarrow$ غیرثابت

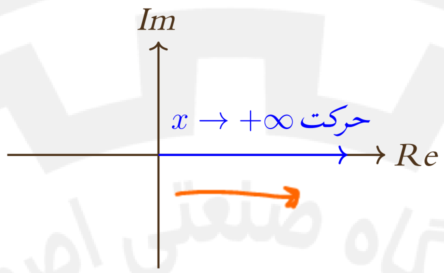


در آنالیز حقیقی می‌دانیم که تابع سینوس کراندار است و همواره رابطه $|\sin(x)|\le ۱$ برقرار است اما بر اساس قضیه لیوویل، چون $\sin(z)$ در صفحه مختلط یک تابع تام و غیرثابت است، الزاماً باید ناکراندار باشد. برای اثبات مستقیم این موضوع، از تعریف سینوس مختلط به صورت $\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{۲i}$ استفاده می‌کنیم. فرض کنید متغیر z روی محور موهومی حرکت کند، یعنی $z=iy$ که در آن y یک عدد حقیقی است. با جایگذاری این مقدار در فرمول، داریم $\sin(iy)=\frac{e^{i(iy)}-e^{-i(iy)}}{۲i}=\frac{e^{-y}-e^{y}}{۲i}$ که با فاکتورگیری از علامت منفی در صورت و استفاده از تعریف تابع هیپربولیک، به صورت $i\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{۲}\right)=i\sinh(y)$ ساده می‌شود. اکنون اندازه (قدر مطلق) این تابع را بررسی می‌کنیم که برابر با $|\sin(iy)|=|i|\cdot|\sinh(y)|=|\sinh(y)|$ است. هنگامی که $y\to\infty$، مقدار $\sinh(y)$ نیز به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین اندازه

$|\sin(z)|$ می‌تواند به بی‌نهایت میل کند و در نتیجه این تابع در صفحه مختلط ناکراندار است، که این نتیجه دقیقاً با پیش‌بینی قضیه لیوویل تطابق دارد.

تمرین ۱۸. بررسی کنید که آیا تابع $f(z) = e^z$ با قضیه لیوویل سازگار است یا خیر.

پاسخ ۱۸.

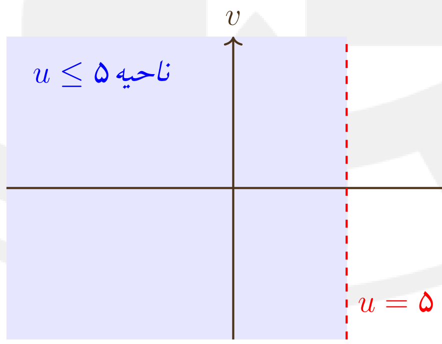


تابع $f(z) = e^z$ یک تابع تام است (در تمام صفحه $\mathbb{C}$ تحلیلی است) و تابع ثابت نیز نیست. طبق قضیه لیوویل، این تابع باید ناکراندار باشد. برای بررسی کرانداری، اندازه آن را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $z = x + iy$، در این صورت قدر مطلق تابع به شکل $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x| \cdot |e^{iy}|$ در می‌آید. می‌دانیم که با استفاده از فرمول اویلر $|e^{iy}| = |\cos(y) + i\sin(y)| = \sqrt{\cos^۲(y) + \sin^۲(y)} = ۱$ است. پس $|e^z| = e^x$ نتیجه می‌شود. اگر در امتداد محور حقیقی مثبت حرکت کنیم (یعنی $y = ۰$ و $x \to +\infty$)، مقدار e^x به بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین تابع e^z ناکراندار است که با قضیه لیوویل کاملاً سازگاری دارد.

تمرین ۱۹. فرض کنید $f(z)$ یک تابع تام باشد و برای تمام $z \in \mathbb{C}$ داشته باشیم $Re(f(z)) \leq ۵$. ثابت کنید $f(z)$ یک تابع ثابت است.

$g(z) = e^{f(z)}$

پاسخ ۱۹.



$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

مستقیماً نمی‌توانیم از قضیه لیوویل روی تابع $f(z)$ استفاده کنیم زیرا فقط می‌دانیم قسمت حقیقی آن کراندار است، نه کل تابع. اما می‌توانیم یک تابع کمکی به صورت $g(z) = e^{f(z)}$ بسازیم. چون $f(z)$ تام است و تابع نمایی نیز تام است، ترکیب آن‌ها یعنی $g(z)$ نیز یک تابع تام خواهد بود. اکنون اندازه $g(z)$ را محاسبه می‌کنیم. فرض کنید $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ که در آن طبق فرض مسئله $u(x,y) = Re(f(z)) \leq ۵$ است. بنابراین قدر مطلق به صورت $|g(z)| = |e^{u+iv}| = |e^u| \cdot |e^{iv}| = e^u \cdot ۱ = e^u$ محاسبه می‌شود. چون $u \leq ۵$ است، با توجه به صعودی بودن تابع نمایی حقیقی داریم $|g(z)| = e^u \leq e^۵$. این یعنی تابع $g(z)$ در تمام صفحه مختلط به کران $e^۵$ کراندار است. اکنون

شرایط قضیه لیوویل برای $g(z)$ برقرار است، یعنی این تابع تام و کراندار است. پس طبق قضیه لیوویل، $g(z)$ باید یک تابع ثابت باشد، مثلاً $g(z) = C$ که نتیجه می‌دهد $e^{f(z)} = C$. با مشتق‌گیری از دو طرف این تساوی نسبت به z رابطه $f'(z) \cdot e^{f(z)} = ۰$ به دست می‌آید که معادل $f'(z) \cdot g(z) = ۰$ است. چون تابع نمایی $g(z) = e^{f(z)}$ هرگز صفر نمی‌شود، باید داشته باشیم $f'(z) = ۰$. تابعی که مشتق آن در تمام صفحه صفر باشد، یک تابع ثابت است و بدین ترتیب ثابت شد که تابع $f(z)$ نیز ثابت است.