آنالیز مختلط

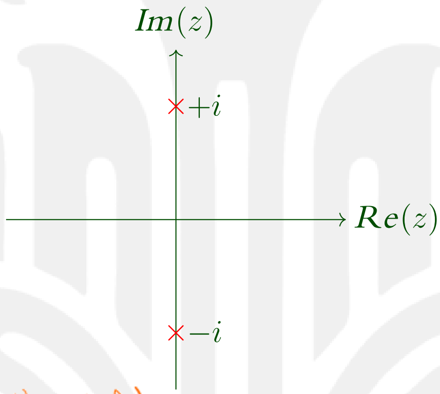
مهریار علوی

تمرین سری ۳

تمرین ۱. تابع مختلط $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ را در نظر بگیرید. قطب‌ها و مقدار مانده در آن‌ها را محاسبه کنید.

$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$

پاسخ ۱. ریشه‌های مخرج، قطب‌های تابع را تشکیل می‌دهند. $z^2+1=0 \implies z^2=-1 \implies z=\pm i$. چون توان مخرج برای هر ریشه یک است، هر دو قطب ساده (مرتبه اول) هستند. فرمول محاسبه مانده برای قطب ساده z_0: $Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$. محاسبه مانده در $z=i$: $Res(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to i}\frac{1}{z+i}=\frac{1}{2i}=-\frac{i}{2}$. محاسبه مانده در $z=-i$: $Res(f,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{1}{(z-i)(z+i)}=\lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{-2i}=\frac{i}{2}$.



$\int_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{z_i}\underset{z=z_i}{Res}(f)$

تمرین ۲. تابع $f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$ را در نظر بگیرید. قطب و مقدار مانده آن را بیابید.

پاسخ ۲. ریشه مخرج $z=1$ است. چون عبارت مخرج دارای توان ۲ است، پس $z=1$ یک قطب از مرتبه $m=2$ است. فرمول محاسبه مانده برای قطب از مرتبه m: $Res(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$. با جایگذاری $z_0=1$ و $m=2$ داریم: $Res(f,1)=\frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{e^z}{(z-1)^2}\right]$. در نتیجه $Res(f,1)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(e^z)=\lim_{z\to 1}e^z=e$.

Residue $\underset{z=1}{Res}\left(\frac{e^z}{(z-1)^2}\right)=e$

تمرین ۳. مانده‌های تابع $f(z)=\frac{1}{z^3-z}$ را در تمامی قطب‌های آن محاسبه کنید.

پاسخ ۳. ابتدا مخرج را تجزیه می‌کنیم تا قطب‌ها مشخص شوند: $z^3-z=z(z^2-1)=z(z-1)(z+1)$. بنابراین تابع دارای سه قطب ساده در $z=0$، $z=1$ و $z=-1$ است. محاسبه مانده در $z=0$: $Res(f,0)=\lim_{z\to 0}z\frac{1}{z(z^2-1)}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^2-1}=-1$. محاسبه مانده در $z=1$: $Res(f,1)=$

$\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{2}$. محاسبه مانده در $z=-1$: $Res(f,-1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{2}$.

تمرین ۴. تابع $f(z) = \frac{z}{(z^2+4)^2}$ را در نظر بگیرید. مانده این تابع را در قطب $z = 2i$ به دست آورید.

پاسخ ۴. مخرج کسر را می‌توان به صورت $(z-2i)^2(z+2i)^2$ نوشت. بنابراین $z = 2i$ یک قطب از مرتبه $m = 2$ است. $Res(f, 2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[(z-2i)^2\frac{z}{(z-2i)^2(z+2i)^2}\right] = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+2i)^2}\right)$. با مشتق‌گیری از کسر داریم: $\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z+2i)^2}\right) = \frac{1\cdot(z+2i)^2 - z\cdot 2(z+2i)}{(z+2i)^4} = \frac{z+2i-2z}{(z+2i)^3} = \frac{-z+2i}{(z+2i)^3}$. حال مقدار $z = 2i$ را جایگذاری می‌کنیم: $Res(f, 2i) = \frac{-2i+2i}{(2i+2i)^3} = 0$.

$\frac{1}{z-z_0}$

تمرین ۵. مقدار مانده تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ را در $z = 0$ محاسبه کنید.

پاسخ ۵. نقطه $z = 0$ یک نقطه تکین اساسی برای این تابع است. برای یافتن مانده در نقاط تکین اساسی، باید از بسط لوران (سری تیلور) استفاده کنیم. بسط مک‌لورن برای e^w به صورت زیر است: $e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$. با جایگذاری $w = \frac{1}{z}$ بسط لوران تابع $f(z)$ به دست می‌آید: $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$. مانده یک تابع در $z_0 = 0$ برابر با ضریب جمله $\frac{1}{z}$ در بسط لوران آن است. بنابراین: $Res(f, 0) = 1$.

$\frac{1}{z-z_0}$ $\frac{1}{(z-z_0)}$

تمرین ۶. با استفاده از تابع $f(z) = \frac{(\log z)^2}{z^2+1}$ در ناحیه $\left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$ نشان دهید که:

$\int f(z)dz = 2\pi i(\sum$ مانده‌ها$)$

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8} \checkmark$$

$\int \frac{(\log z)^2}{z^2+1}dz$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0 \checkmark$$

$\log z = \ln x + i\pi$

روی L_2

پاسخ ۶. برای حل این مسئله، انتگرال تابع $f(z)$ را روی مسیر بسته C مطابق شکل ۱ در نظر می‌گیریم. این مسیر متشکل از یک نیم‌دایره بزرگ C_R به شعاع R، یک نیم‌دایره کوچک C_ρ به شعاع ρ در اطراف مبدأ، و پاره‌خط‌های L_1 (از ρ تا R) روی محور حقیقی مثبت) و L_2 (از $-R$ تا $-\rho$) روی محور حقیقی منفی) است.

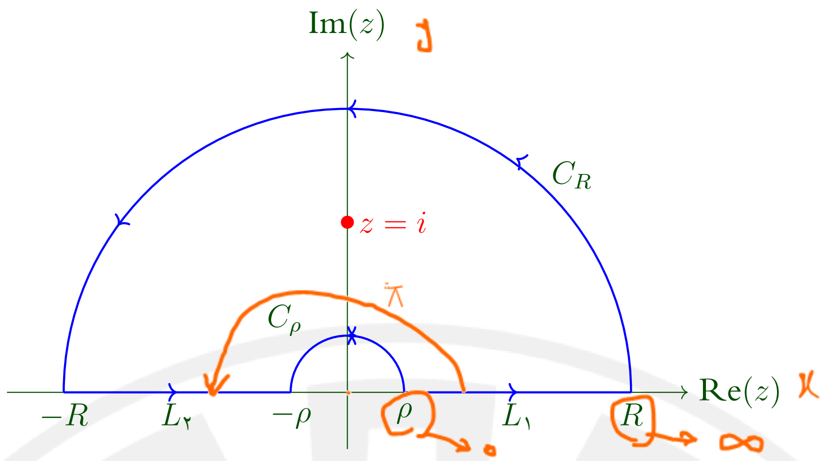
با میل دادن $R \to \infty$ و $\rho \to 0$، انتگرال روی نیم‌دایره‌ها به صفر میل می‌کند. بنابراین طبق قضیه مانده‌ها داریم:

$\left|\int f(z)dz\right| < \int |f(z)|dz$

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum Res$$

روی پاره‌خط L_1، قرار می‌دهیم $z = x$ که در نتیجه $\log z = \ln x$. پس:

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx \quad (1)$$



شکل ۱: مسیر انتگرال‌گیری C و قطب $z=i$ در صفحه مختلط

روی پاره‌خط L_2، قرار می‌دهیم $z = xe^{i\pi} = -x$ (که در آن $x > 0$). با توجه به شاخه لگاریتم داده شده، $\log z = \ln x + i\pi$. همچنین $dz = -dx$ و انتگرال از ∞ تا ۰ است، پس با تغییر کران‌ها یک علامت منفی ظاهر می‌شود:

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_0^\infty \frac{(\ln x + i\pi)^2}{(-x)^2+1}\,dx = \underline{\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2 - \pi^2 + 2\pi i \ln x}{x^2+1}\,dx} \quad (2)$$

با جمع کردن این دو انتگرال داریم:

$$(1)+(2) \Longrightarrow \oint_C f(z)\,dz = 2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx - \pi^2 \underline{\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx} + 2\pi i \boxed{\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx}$$

می‌دانیم که $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}$. پس:

$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x \Big|_0^\infty = \pi/2 - 0 = \pi/2$

$\oint_C \frac{(\log z)^2}{1+z^2}$

$z^2+1=0$, $z=\pm i$, $z=i$

$$\underline{\oint_C f(z)\,dz} = \underbrace{2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx - \frac{\pi^3}{2}}_{Re} + \underbrace{2\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx}_{Im} \quad (*)$$

اکنون مانده تابع $f(z)$ را در قطب‌های داخل مسیر (همان‌طور که در شکل ۱ مشخص است) محاسبه می‌کنیم. تابع $f(z)$ دارای قطب‌های ساده در $z = \pm i$ است، اما فقط $z = i$ درون مسیر نیم‌دایره بالایی قرار دارد.

$$Res(f, i) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{(\log z)^2}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{(\log i)^2}{2i}$$

$\log i = \log 1 e^{i\pi/2}$, θ

با توجه به شاخه تعریف شده، $\underline{\log i = \ln(1) + i\frac{\pi}{2}} = i\frac{\pi}{2}$. بنابراین:

$\ln r + i\theta$

$z = re^{i\theta}$, $\pi/2$

$$Res(f, i) = \frac{(i\frac{\pi}{2})^2}{2i} = \frac{-\frac{\pi^2}{4}}{2i} = i\frac{\pi^2}{8}$$

طبق قضیه مانده‌ها:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(i\frac{\pi^2}{8}\right) = -\frac{\pi^3}{4}$$

با مساوی قرار دادن دو رابطه به دست آمده برای انتگرال مسیر بسته داریم:

$$\circledast \quad \Longrightarrow \quad 2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx - \frac{\pi^3}{2} + 2\pi i \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = -\frac{\pi^3}{4}$$

با مساوی قرار دادن قسمت‌های حقیقی و موهومی دو طرف معادله، نتایج زیر حاصل می‌شود: قسمت موهومی:

$$2\pi \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0 \implies \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx = 0$$

قسمت حقیقی:

$$2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx - \frac{\pi^3}{2} = -\frac{\pi^3}{4}$$

$$2\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{4} = \frac{\pi^3}{4}$$

$$\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi^3}{8}$$

به این ترتیب هر دو حکم ثابت می‌شوند.

تمرین ۷. *تعداد ریشه‌های معادله* $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ *را با احتساب چندگانگی آن‌ها، در طوق* $1 \le |z| < 2$ *تعیین کنید.*

پاسخ ۷. *برای حل این مسئله از قضیه روشه استفاده می‌کنیم. ابتدا صورت دقیق این قضیه را بیان می‌کنیم:*

قضیه روشه: *فرض کنید توابع f و g درون و روی یک منحنی بسته و ساده C تحلیلی باشند. اگر برای هر نقطه z روی منحنی C نامساوی $|g(z)| < |f(z)|$ برقرار باشد، آنگاه دو تابع $f(z)$ و $f(z) + g(z)$ تعداد ریشه‌های یکسانی (با احتساب چندگانگی) درون C دارند.*

برای یافتن تعداد ریشه‌ها در ناحیه حلقوی $1 \le |z| < 2$، ابتدا تعداد ریشه‌ها را در دایره بزرگتر $|z| < 2$ پیدا می‌کنیم و سپس تعداد ریشه‌های داخل دایره کوچکتر $|z| < 1$ را از آن کم می‌کنیم. همچنین باید وضعیت روی مرز $|z| = 1$ را نیز بررسی کنیم.

گام اول: بررسی ریشه‌ها در ناحیه $|z| < 2$

روی مرز $|z| = 2$، توابع $f(z)$ و $g(z)$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$f(z) = 2z^5 \quad \checkmark$$

$f(z)$, $f(z)+g(z)$

$$g(z) = -6z^2 + z + 1 \quad \checkmark$$

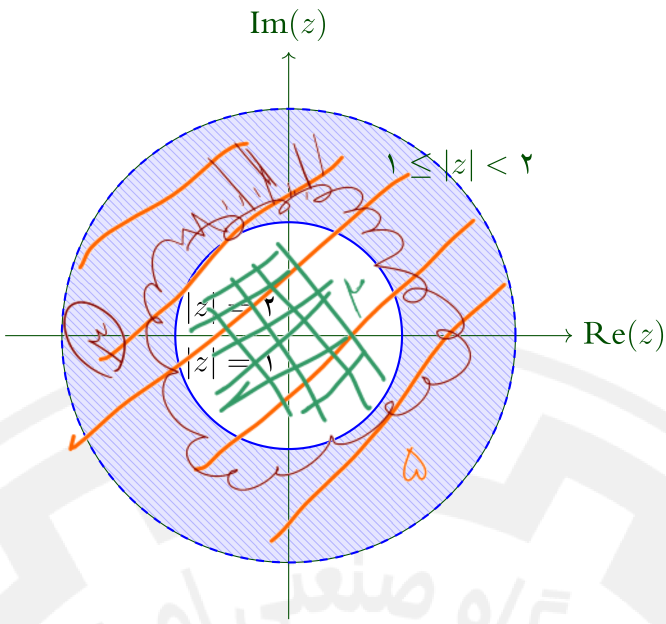
$|a+b| \le |a|+|b|$

اندازه این توابع روی مرز $|z| = 2$ برابر است با:

$$|f(z)| = |2z^5| = 2|z|^5 = 2(2^5) = 64$$

$$|g(z)| = |-6z^2 + z + 1| \le |-6z^2| + |z| + |1| = 6(2^2) + 2 + 1 = 24 + 2 + 1 = 27$$

چون روی مرز $|z| = 2$ داریم $64 > 27$، در نتیجه $|g(z)| < |f(z)|$. طبق قضیه روشه، تعداد ریشه‌های $f(z) + g(z) =$



شکل ۲: ناحیه حلقوی (طوق) $1 \le |z| < 2$

*$2z^5 - 6z^2 + z + 1$ درون دایره $|z| < 2$ با تعداد ریشه‌های $f(z) = 2z^5$ برابر است. تابع $2z^5$ دارای ۵ ریشه (در مبدأ) است، پس معادله اصلی **۵ ریشه** در $|z| < 2$ دارد.*

گام دوم: بررسی ریشه‌ها در ناحیه $|z| < 1$

این بار روی مرز $|z| = 1$، توابع را به شکل دیگری انتخاب می‌کنیم تا شرط قضیه روشه برقرار شود:

$$f(z) = -6z^2$$

$$g(z) = 2z^5 + z + 1$$

اندازه این توابع روی مرز $|z| = 1$ برابر است با:

$$|f(z)| = |-6z^2| = 6|z|^2 = 6(1^2) = 6$$

$$|g(z)| = |2z^5 + z + 1| \le |2z^5| + |z| + |1| = 2(1^5) + 1 + 1 = 4$$

*چون روی مرز $|z| = 1$ داریم $6 > 4$، در نتیجه $|g(z)| < |f(z)|$. طبق قضیه روشه، تعداد ریشه‌های $f(z) + g(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ درون دایره $|z| < 1$ با تعداد ریشه‌های $f(z) = -6z^2$ برابر است. تابع $-6z^2$ دارای ۲ ریشه (در مبدأ) است، پس معادله اصلی **۲ ریشه** در $|z| < 1$ دارد.*

نتیجه‌گیری:

همچنین با توجه به اینکه روی $|z| = 1$ نامساوی اکید $|g(z)| < |f(z)|$ برقرار است، تابع $f(z) + g(z)$ روی خود مرز $|z| = 1$ نمی‌تواند صفر شود (هیچ ریشه‌ای روی مرز وجود ندارد). بنابراین تعداد ریشه‌ها در ناحیه $1 \le |z| < 2$ برابر است با تفاضل ریشه‌های داخل دایره بزرگتر و دایره کوچکتر:

$$\text{تعداد ریشه‌ها} = 5 - 2 = 3$$

*پس این معادله در طوق مورد نظر **۳ ریشه** دارد.*

تمرین ۸. فرض کنید C معرف دایره $|z| = ۱$ در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت باشد، مراحل زیر را طی کرده نشان دهید که:

$$\int_C \exp\left(z+\frac{۱}{z}\right) dz = ۲\pi i \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!(n+۱)!}$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

الف) با استفاده از بسط سری مکلورن برای e^z انتگرال بالا را به صورت زیر بنویسید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right) dz$$

ب) انتگرال‌های قسمت (الف) را محاسبه کرده به نتیجه مطلوب برسید.

پاسخ ۸.

قسمت (الف):

بسط سری مکلورن تابع نمایی e^z به صورت زیر است:

$$e^z = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

با نوشتن تابع اصلی به صورت حاصل‌ضرب دو تابع نمایی داریم:

$$\exp\left(z+\frac{۱}{z}\right) = e^z e^{\frac{۱}{z}}$$

با جایگذاری بسط e^z در انتگرال به دست می‌آوریم:

$$\int_C \exp\left(z+\frac{۱}{z}\right) dz = \int_C \left(\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \exp\left(\frac{۱}{z}\right) dz$$

از آنجا که این سری روی مسیر بسته C به طور یکنواخت همگراست، طبق قضیه انتگرال‌گیری جمله به جمله (قضیه ۱ بخش ۵۹ در کتاب‌های استاندارد متغیر مختلط مانند چرچیل)، می‌توانیم جای عملگر انتگرال و سیگما را جابجا کنیم:

$$= \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right) dz$$

قسمت (ب):

برای محاسبه انتگرال $\int_C z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right) dz$ از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم. ابتدا بسط لوران تابع $z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right)$ را حول نقطه تکین $z = ۰$ می‌نویسیم:

$$e^w = 1 + w + w^2 + \cdots$$

$$e^{1/z} = \cdots$$

$$z^n \exp\left(\frac{۱}{z}\right) = z^n \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{۱}{k!} \left(\frac{۱}{z}\right)^k = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{z^{n-k}}{k!}$$

باید ← ضریب این $\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$

مانده این تابع در $z = ۰$ برابر با ضریب جمله $z^{-۱}$ است. این جمله زمانی ظاهر می‌شود که توان z برابر -۱ باشد، یعنی:

$$n - k = -۱ \implies k = n + ۱$$

$$\frac{1}{z}$$

$Res(f, z_0)$

بنابراین، ضریب جمله $\frac{1}{z}$ برابر است با مقدار $\frac{1}{k!}$ به ازای $k = n + 1$:

$$Res_{z=0}\left(z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right)\right) = \frac{1}{(n+1)!}$$

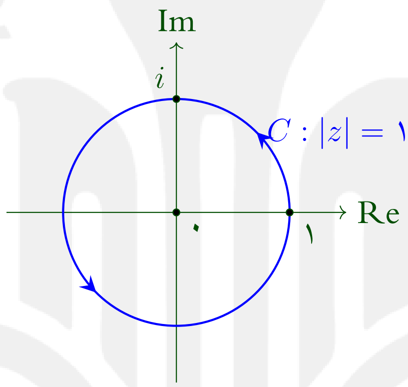
طبق قضیه مانده‌ها (قضیه بخش ۶۳)، مقدار انتگرال روی مسیر بسته C برابر است با $2\pi i$ ضربدر مجموع مانده‌های درون آن:

$$\int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(\frac{1}{(n+1)!}\right)$$

حال این مقدار را در رابطه به دست آمده از قسمت (الف) قرار می‌دهیم:

$$\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(2\pi i \frac{1}{(n+1)!}\right) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}$$

که حکم مسئله ثابت می‌شود.



شکل ۳: مسیر انتگرال‌گیری C، دایره واحد $|z| = 1$ در جهت مثلثاتی.

تمرین ۹. مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر: الف)

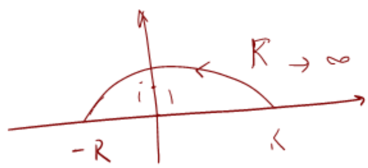
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2 dx$$

$z^2 + 1 = (z - i)(z + i) = 0$

$z = \pm i$

ب) نشان دهید که برای هر عدد طبیعی n:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)\pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}$$



پاسخ ۹. **پاسخ الف)** برای محاسبه انتگرال $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$، تابع مختلط $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ را در نظر می‌گیریم و از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم. مسیر انتگرال‌گیری Γ را شامل پاره‌خط $[-R, R]$ روی محور حقیقی و نیم‌دایره C_R به شعاع R در نیم‌صفحه بالایی در نظر می‌گیریم (مطابق شکل ۴).
تابع $f(z)$ دارای قطب‌های مرتبه دوم در نقاط $z = \pm i$ است. از آنجا که مسیر Γ در نیم‌صفحه بالایی قرار دارد، تنها قطب $z = i$ درون این مسیر محصور است.

ابتدا مانده تابع $f(z)$ را در نقطه $z = i$ محاسبه می‌کنیم. چون $z = i$ یک قطب مرتبه ۲ است، داریم:

$$Res_{z=i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2 (z+i)^2} \right]$$

$$= \lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^{-2} \right] = \lim_{z \to i} -2(z+i)^{-3}$$

$$= -2(2i)^{-3} = -2 \left(\frac{1}{-8i} \right) = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$$

بنابراین، بر اساس قضیه مانده‌ها:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \underline{\int_{-R}^{R} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx} + \underline{\int_{C_R}} f(z)dz = 2\pi i \left(Res_{z=i} f(z) \right) = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}$$

با میل دادن $R \to \infty$، انتگرال روی نیم‌دایره C_R به صفر میل می‌کند (زیرا درجه مخرج ۲ واحد بیشتر از صورت است):

$$\underline{\left| \int_{C_R} \frac{1}{(1+z^2)^2} dz \right|} \le \underline{\int_{C_R} \frac{1}{|1+z^2|^2} |dz|} \le \frac{1}{(R^2-1)^2} \pi R \to 0 \quad as R \to \infty$$

بنابراین:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

پاسخ ب) برای اثبات این رابطه کلی نیز از روش مشابه قسمت (الف) استفاده می‌کنیم. تابع مختلط $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^n}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع دارای قطب مرتبه n در نقطه $z = i$ است که درون مسیر نیم‌دایره‌ای (شکل ۴) قرار دارد. برای محاسبه مانده این تابع در $z = i$، فرمول مانده برای قطب‌های مرتبه n را به کار می‌بریم:

$$Res_{z=i} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\cancel{(z-i)^n} \frac{1}{\cancel{(z-i)^n} (z+i)^n} \right] \checkmark$$

$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{(x+1)^n}$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to i} \underline{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z+i)^{-n} \right]} \checkmark \qquad ۱$$

مشتقات $(z+i)^{-n}$ به صورت زیر الگوی مشخصی دارند:

$$\frac{d}{dz}(z+i)^{-n} = -n(z+i)^{-n-1}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}(z+i)^{-n} = -n(-n-1)(z+i)^{-n-2} = n(n+1)(z+i)^{-n-2}$$

$$\cdots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+i)^{-n} = (-1)^{n-1} n(n+1) \dots (n+(n-1)-1)(z+i)^{-n-(n-1)}$$

$$= (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (z+i)^{-2n+1} \qquad ۲$$

با جایگذاری این عبارت در فرمول مانده و میل دادن $z \to i$:

$$Res_{z=i} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\left((-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(2i)^{-2n+1}\right)$$

توجه کنید که $(2i)^{-2n+1} = (2i)^{-2n}(2i) = (2^2 i^2)^{-n}(2i) = (-4)^{-n}(2i) = (-1)^{-n}2^{-2n}(2i) = (-1)^n 2^{-2n+1} i$.

$$Res_{z=i} f(z) = \frac{1}{((n-1)!)^2}(-1)^{n-1}(2n-2)!(-1)^n 2^{-2n+1} i$$

$$= \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2}(-1)^{2n-1}2^{-2n+1} i = -i\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$$

اکنون از قضیه مانده‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = 2\pi i\left(-i\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}\right) = \frac{2\pi(2n-2)!}{2^{2n-1}((n-1)!)^2}$$

$$= \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}$$

برای رسیدن به فرم خواسته شده در صورت سوال، می‌توانیم صورت و مخرج را تغییر شکل دهیم. می‌دانیم که $(2k)! = 2^k \cdot k! \cdot (1\cdot 3 \dots (2k-1))$. اگر $k = n-1$ قرار دهیم:

$$(2n-2)! = 2^{n-1}(n-1)!(1\cdot 3\dots(2n-3))$$

پس:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{\pi\cdot 2^{n-1}(n-1)!(1\cdot 3\dots(2n-3))}{2^{2n-2}(n-1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{\pi\cdot(1\cdot 3\dots(2n-3))}{2^{n-1}(n-1)!}$$

مخرج را به صورت حاصل‌ضرب اعداد زوج می‌نویسیم: $2^{n-1}(n-1)! = 2(1)\cdot 2(2)\dots 2(n-1) = 2\cdot 4\dots(2n-2)$. پس:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n}dx = \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-3)\cdot\pi}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot(2n-2)}$$

با توجه به اینکه مخرج کسر سمت راست در صورت سوال تا $2n$ است، این رابطه برای $n+1$ نوشته شده است. اگر در کسر به دست آمده به جای n، $n+1$ قرار دهیم، به فرمول داده شده در صورت سوال می‌رسیم:

$$I_{n+1} = \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2n-1)\pi}{2\cdot 4\dots 2n}$$

که به نظر می‌رسد منظور طراح سوال در قسمت (ب) اثبات همین رابطه برای انتگرال I_{n+1} بوده است. در غیر این صورت، فرمول برای I_n تا جملات $(2n-3)$ در صورت و $(2n-2)$ در مخرج پیش می‌رود.

تمرین ۱۰. نقطه $z=0$ برای تابع $f(z) = e^{1/z}$ یک تکین اساسی است. با استفاده از این تابع، درستی قضیه کازوراتی‌ـ وایرشتراس را نشان دهید. به طور خاص ثابت کنید برای هر عدد مختلط غیر صفر $w \in \mathbb{C}$، می‌توان دنباله‌ای از

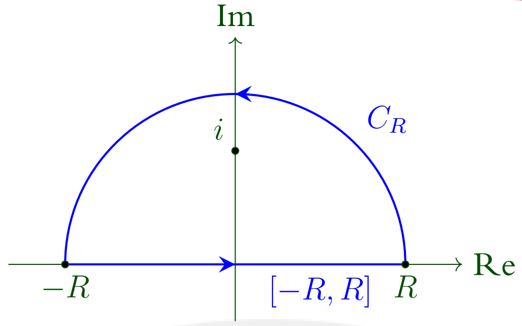
$e^{1/z}$ $z=0$ تکین اساسی

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}-\mathbb{Q}$

D همسایگی محذوف از z_0

$D: \{z \mid 0<|z-z_0|<\epsilon\}$



شکل ۴: مسیر انتگرال‌گیری نیم‌دایره‌ای در نیم‌صفحه بالایی مختلط.

$f(D)=\{f(z) \mid z\in D\}$ چگال

نقاط مانند z_n یافت به طوری که $z_n \to ۰$ و $f(z_n) = w$. (این نشان می‌دهد که تصویر هر همسایگی محذوف از مبدأ، شامل تمام صفحه مختلط به جز احتمالاً نقطه صفر است، که در نتیجه در $\mathbb{C}$ چگال خواهد بود).

پاسخ ۱۰. تابع داده شده $f(z) = e^{۱/z}$ است. بسط لوران این تابع حول مبدأ به صورت زیر است:

$z=0$ $e^{1/z}$

$$e^{۱/z} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!z^n} = ۱ + \frac{۱}{z} + \frac{۱}{۲!z^۲} + \frac{۱}{۳!z^۳} + \dots$$

چون بسط لوران دارای بی‌نهایت جمله با توان منفی z است، نقطه $z_۰ = ۰$ یک تکین اساسی برای این تابع است.
حال یک عدد مختلط دلخواه و غیر صفر w را در نظر می‌گیریم. می‌توانیم w را به فرم قطبی بنویسیم:

$$w = Re^{i\theta}$$

که در آن $R = |w| > ۰$ و $\theta = \arg(w)$ است.
می‌خواهیم نشان دهیم در هر همسایگی محذوف از صفر $(۰ < |z| < \epsilon)$، نقطه‌ای وجود دارد که مقدار تابع در آن دقیقاً برابر w می‌شود. معادله $f(z) = w$ را حل می‌کنیم:

$$e^{۱/z} = Re^{i\theta}$$

با گرفتن لگاریتم مختلط از طرفین داریم:

$$\frac{۱}{z} = \ln(Re^{i\theta}) = \ln(R) + i(\theta + ۲k\pi) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین جواب‌های z برای این معادله به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$z_k = \frac{۱}{\ln(R) + i(\theta + ۲k\pi)}$$

اکنون بررسی می‌کنیم که با بزرگ شدن k چه اتفاقی برای این نقاط می‌افتد. اندازه z_k برابر است با:

$$|z_k| = \frac{۱}{\sqrt{(\ln R)^۲ + (\theta + ۲k\pi)^۲}}$$

واضح است که وقتی $k \to \pm\infty$، مخرج کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در نتیجه:

$$\lim_{k\to\pm\infty} |z_k| = ۰$$

این بدان معناست که ما یک دنباله از نقاط z_k پیدا کردیم که به سمت نقطه تکین اساسی $z_۰ = ۰$ میل می‌کنند ($z_k \to ۰$). بنابراین، برای هر شعاع دلخواه $\epsilon > ۰$، می‌توانیم k را به اندازه کافی بزرگ (یا کوچک) انتخاب کنیم تا $|z_k| < \epsilon$ شود. یعنی در هر همسایگی محذوف از مبدأ، بی‌نهایت نقطه z_k وجود دارد که در آن‌ها تابع دقیقاً مقدار w را می‌گیرد:

$$f(z_k) = w$$

این نتیجه، که حتی از ادعای چگال بودن قضیه کازوراتی_ وایرشتراس نیز قوی‌تر است (و به قضیه بزرگ پیکارد معروف است)، به وضوح نشان می‌دهد که تصویر هر همسایگی محذوف از مبدأ تحت تابع $e^{۱/z}$، شامل تمام صفحه مختلط (به جز نقطه صفر) است و بنابراین در $\mathbb{C}$ چگال است. برای نقطه $w = ۰$ نیز، اگرچه تابع هرگز دقیقاً برابر صفر نمی‌شود، اما با انتخاب $z_n = -۱/n$ روی محور حقیقی، داریم $z_n \to ۰$ و $f(z_n) = e^{-n} \to ۰$، که نشان می‌دهد مقادیر تابع به صفر نیز بی‌نهایت نزدیک می‌شوند.

تمرین ۱۱. با استفاده از قضیه کازوراتی_ وایرشتراس رفتار تابع $f(z) = \sin(۱/z)$ را در مجاورت تکین اساسی $z_۰ = ۰$ بررسی کنید.

پاسخ ۱۱. بسط لوران تابع $f(z) = \sin(۱/z)$ حول مبدأ به صورت زیر است:

$$\sin\left(\frac{۱}{z}\right) = \frac{۱}{z} - \frac{۱}{۳!z^۳} + \frac{۱}{۵!z^۵} - \dots$$

از آنجا که بی‌نهایت جمله با توان منفی z وجود دارد، نقطه $z_۰ = ۰$ یک تکین اساسی است. بنا بر قضیه کازوراتی_ وایرشتراس، در هر همسایگی محذوف از مبدأ، این تابع مقادیری به خود می‌گیرد که در کل صفحه مختلط چگال هستند. برای درک بهتر، چند مسیر مختلف را که به مبدأ میل می‌کنند بررسی می‌کنیم:

۱. فرض کنید روی محور حقیقی، دنباله $z_n = \frac{۱}{n\pi}$ را در نظر بگیریم. واضح است که وقتی $n \to \infty$، آنگاه $z_n \to ۰$. مقادیر تابع روی این دنباله برابر است با:

$$f(z_n) = \sin(n\pi) = ۰$$

بنابراین روی این مسیر، حد تابع برابر صفر است.

۲. حال دنباله $z_n = \frac{۱}{in}$ را روی محور موهومی در نظر بگیرید. وقتی $n \to \infty$، داریم $z_n \to ۰$. مقدار تابع برابر خواهد بود با:

$$f(z_n) = \sin(-in) = -i\sinh(n)$$

وقتی $n \to \infty$، مقدار $\sinh(n) \to \infty$. پس روی این مسیر، تابع به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

این رفتار نشان می‌دهد که تابع در مجاورت تکین اساسی خود هیچ حد مشخصی ندارد و نوسانات شدیدی انجام می‌دهد که مؤید قضیه کازوراتی_ وایرشتراس است.

تمرین ۱۲. با استفاده از قضیه کازوراتی_ وایرشتراس رفتار تابع $f(z) = e^z$ را در نقطه تکین اساسی در بی‌نهایت ($z_۰ = \infty$) بررسی کنید.

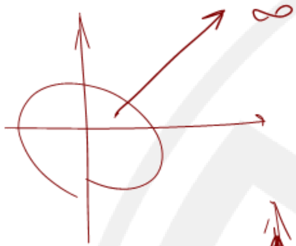
پاسخ ۱۲. برای بررسی رفتار یک تابع در بی‌نهایت، تغییر متغیر $w = ۱/z$ را اعمال کرده و رفتار تابع $g(w) = f(۱/w)$ را در نقطه $w = ۰$ بررسی می‌کنیم:

$$g(w) = e^{۱/w}$$

همان‌طور که می‌دانیم، $w = ۰$ یک تکین اساسی برای $e^{۱/w}$ است (بسط لوران آن بی‌نهایت جمله با توان منفی w دارد). بنابراین $z = \infty$ یک تکین اساسی برای $f(z) = e^z$ است.

طبق قضیه کازوراتی- وایرشتراس، در هر همسایگی از بی‌نهایت (یعنی ناحیه‌ای به فرم $|z| > R$ برای R به اندازه کافی بزرگ)، مقادیر تابع e^z تمام صفحه مختلط را می‌پوشاند (به جز مقدار صفر، طبق قضیه پیکارد).

برای مشاهده این نوسانات شدید در بی‌نهایت، چند مسیر را که به سمت بی‌نهایت می‌روند در نظر می‌گیریم:



۱. اگر $z = x$ (روی محور حقیقی مثبت) به سمت بی‌نهایت برود ($x \to +\infty$):

$z = x > ۰$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

۲. اگر $z = x$ (روی محور حقیقی منفی) به سمت بی‌نهایت برود ($x \to -\infty$):

$z = x < ۰$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = ۰$$

۳. اگر $z = iy$ (روی محور موهومی) به سمت بی‌نهایت برود ($y \to +\infty$):

$$f(iy) = e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y) =$$

در این حالت مقدار تابع روی دایره یکه در صفحه مختلط نوسان می‌کند و هیچ حدی ندارد. مشاهده می‌شود که با نزدیک شدن به بی‌نهایت از مسیرهای مختلف، تابع e^z مقادیر کاملاً متفاوتی (صفر، بی‌نهایت و مقادیر روی دایره یکه) به خود می‌گیرد که این همان خاصیت بیان شده در قضیه کازوراتی- وایرشتراس برای تکین‌های اساسی است.