توابع مختلط

مهریار علوی

تمرین سری ۴

تمرین ۱. با استفاده از تابع $f(z) = \frac{\log z}{(z^2+1)^2}$ (با شاخه $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$) و مسیر نیم‌دایره‌ای در نیم‌صفحه بالایی، نشان دهید که $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{\pi}{4}$.

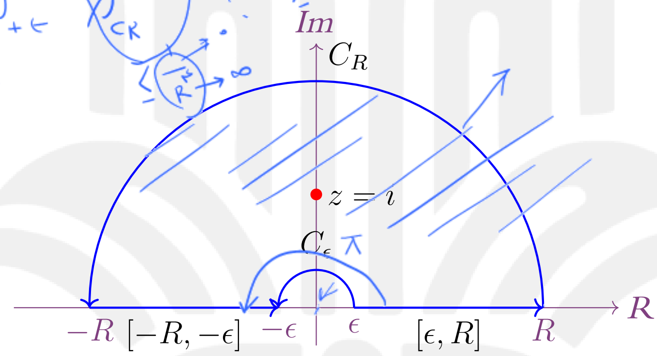
$f(z) = \frac{\log(z)}{(z^2+1)^2}$

$f_1(z) = \log(z)$

پاسخ ۱. مسیر Γ را شامل قطعه خط‌های $[-R,-\epsilon]$ و $[\epsilon, R]$ روی محور حقیقی، نیم‌دایره کوچک C_ϵ حول مبدا و نیم‌دایره بزرگ C_R در نظر می‌گیریم. تنها قطب تابع در این ناحیه $z = i$ (قطب مرتبه دوم) است. مانده تابع در این نقطه برابر است با $Res(f(z), i) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\frac{\log z}{(z+i)^2}\right] = \frac{\pi+2i}{8}$. طبق قضیه مانده‌ها، انتگرال روی مسیر بسته برابر است با $\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{\pi+2i}{8}\right) = i\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}$. با میل دادن $R \to \infty$ و $\epsilon \to 0$، انتگرال روی کمان‌ها صفر می‌شود. برای بخش‌های روی محور حقیقی داریم $-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4} = \int_{-\infty}^0 \frac{\ln|x|+i\pi}{(x^2+1)^2}dx + \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx$ که ساده می‌شود به $2\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$. با برابر قرار دادن قسمت‌های حقیقی دو طرف تساوی نتیجه می‌گیریم $\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}$.

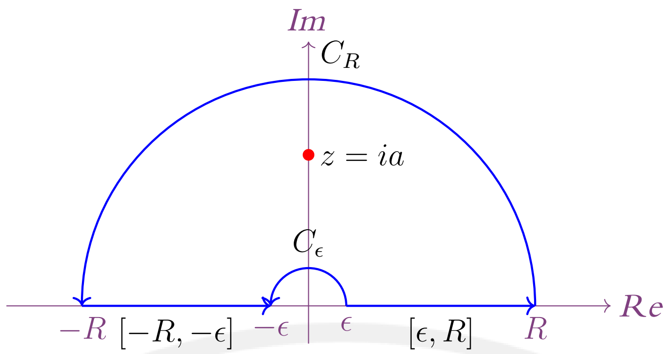
$z = i e^{i\theta}$

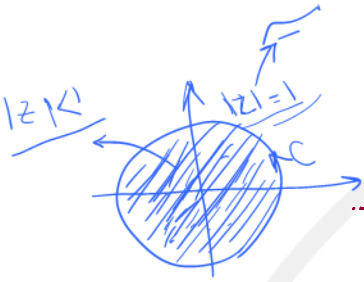
$\log(z)$



تمرین ۲. فرض کنید $a > 0$ یک عدد حقیقی است. با استفاده از انتگرال‌گیری روی مسیر مختلط مناسب از تابع $f(z) = \frac{\log z}{z^2+a^2}$، مقدار انتگرال $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ را بیابید.

پاسخ ۲. همانند سوال قبل، از مسیر نیم‌دایره‌ای در نیم‌صفحه بالایی استفاده می‌کنیم. تابع دارای یک قطب ساده در نیم‌صفحه بالایی در نقطه $z = ia$ است. مانده در این نقطه برابر است با $Res(f(z), ia) = \lim_{z\to ia}(z-ia)\frac{\log z}{(z-ia)(z+ia)} = \frac{\log(ia)}{2ia} = \frac{\ln a + i\frac{\pi}{2}}{2ia}$. بر اساس قضیه مانده‌ها داریم $\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\left(\frac{\ln a + i\frac{\pi}{2}}{2ia}\right) = \frac{\pi \ln a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a}$. با در نظر گرفتن حد $R\to\infty$ و $\epsilon \to 0$ و نوشتن انتگرال روی محور حقیقی داریم $2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx + i\pi\int_0^\infty \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\ln a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a}$. با مساوی قرار دادن بخش‌های حقیقی به دست می‌آوریم $2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi \ln a}{a}$ که نتیجه می‌دهد $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi\ln a}{2a}$.





f, g $\quad |f(z)| > |g(z)|$ $\quad$ تعداد صفرها = تعداد صفرها $\quad f(z),\ f(z)+g(z)$

$|z|=1$

تمرین ۳. نشان دهید که معادله $z^5 + 4z^2 + 1 = 0$ دقیقاً دو ریشه در دیسک یکه $|z| < 1$ دارد.

$f(z),\ g(z)$ — $4z^2$، z^5+1

پاسخ ۳.
برای استفاده از قضیه روشه، قرار می‌دهیم $f(z) = 4z^2$ و $g(z) = z^5 + 1$. روی مرز $|z| = 1$ داریم: $|f(z)| = |4z^2| = 4|z|^2 = 4$ و $|g(z)| = |z^5 + 1| \le |z|^5 + 1 = 1 + 1 = 2$. بنابراین روی مرز $C : |z| = 1$ شرط $|f(z)| > |g(z)|$ برقرار است. طبق قضیه روشه، تعداد ریشه‌های تابع $f(z) + g(z)$ با تعداد ریشه‌های تابع $f(z)$ در داخل این دیسک برابر است. از آنجا که $f(z) = 4z^2$ یک ریشه مضاعف (از مرتبه ۲) در مبدأ $z = 0$ دارد، پس معادله اصلی نیز دقیقاً ۲ ریشه در $|z| < 1$ دارد.

$a_n z^n \dots + a_0 = 0 \quad \mathbb{C}$

$x^2 + 1 = 0$ جواب ندارد $\mathbb{R}$

$x^2 + 1 = 0 \quad x = \pm i$ جواب دارد $\mathbb{C}$

تعداد ریشه‌های معادله $z^4 - 6z + 3 = 0$ را در طوقه $1 < |z| < 2$ پیدا کنید.
این مسئله را در دو مرحله حل می‌کنیم:

۱. داخل $|z| < 2$: قرار می‌دهیم $f_1(z) = z^4$ و $g_1(z) = -6z + 3$. روی $|z| = 2$ داریم $|f_1(z)| = 2^4 = 16$ و $|g_1(z)| = |-6z + 3| \le 6(2) + 3 = 15$. چون $|f_1(z)| > |g_1(z)|$، تعداد ریشه‌ها برابر ریشه‌های z^4 یعنی ۴ ریشه است.

۲. داخل $|z| < 1$: قرار می‌دهیم $f_2(z) = -6z$ و $g_2(z) = z^4 + 3$. روی $|z| = 1$ داریم $|f_2(z)| = 6(1) = 6$ و $|g_2(z)| = |z^4 + 3| \le 1^4 + 3 = 4$. چون $|f_2(z)| > |g_2(z)|$، تعداد ریشه‌ها برابر ریشه‌های $-6z$ یعنی ۱ ریشه است.

در نتیجه، تعداد ریشه‌ها در ناحیه $1 < |z| < 2$ برابر است با $4 - 1 = 3$ ریشه.

تمرین ۴. تعداد ریشه‌های معادله $z^4 - 6z + 3 = 0$ را در طوقه $1 < |z| < 2$ پیدا کنید.

پاسخ ۴. این مسئله را در دو مرحله حل می‌کنیم:
۱. **داخل** $|z| < 2$: قرار می‌دهیم $f_1(z) = z^4$ و $g_1(z) = -6z + 3$. روی $|z| = 2$ داریم: $|f_1(z)| = 2^4 = 16$ و $|g_1(z)| = |-6z + 3| \le 6(2) + 3 = 15$ چون $|f_1(z)| > |g_1(z)|$، تعداد ریشه‌ها برابر ریشه‌های z^4 یعنی ۴ ریشه است.

۲. **داخل** $|z| < 1$: قرار می‌دهیم $f_2(z) = -6z$ و $g_2(z) = z^4 + 3$. روی $|z| = 1$ داریم: $|f_2(z)| = 6(1) = 6$ و $|g_2(z)| = |z^4 + 3| \le 1^4 + 3 = 4$ چون $|f_2(z)| > |g_2(z)|$، تعداد ریشه‌ها برابر ریشه‌های $-6z$ یعنی ۱ ریشه است.
در نتیجه، تعداد ریشه‌ها در ناحیه $1 < |z| < 2$ برابر است با $4 - 1 = 3$ ریشه.

$n \in \mathbb{N}$

تمرین ۵. نشان دهید که معادله $e^z - 4z^n + 1 = 0$ (برای $n \geq 1$) دقیقاً n ریشه در داخل دایره $|z| = 1$ دارد.

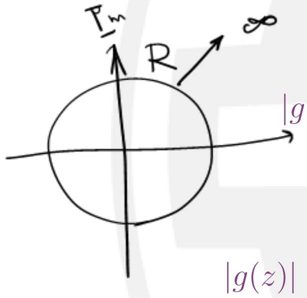
پاسخ ۵. قرار می‌دهیم $f(z) = -4z^n$ و $g(z) = e^z + 1$. روی مرز $|z| = 1$ مقدار $|f(z)|$ برابر است با: $|f(z)| = |-4z^n| = 4|z|^n = 4$. برای ارزیابی $|g(z)|$ روی این دایره داریم: $|g(z)| = |e^z + 1| \leq |e^z| + 1 = e^{Re(z)} + 1$. چون روی دایره یکه $-1 \leq Re(z) \leq 1$ است، بیشترین مقدار ممکن برای $e^{Re(z)}$ برابر $e^1 = e$ است. پس: $|g(z)| \leq e + 1 \approx 2.718 + 1 = 3.718$. از آنجا که $4 > 3.718$، روی دایره $|z| = 1$ شرط $|f(z)| > |g(z)|$ برقرار است. تابع $f(z) = -4z^n$ در مبدا دارای n ریشه است، بنابراین طبق قضیه روشه، معادله اصلی نیز n ریشه در $|z| < 1$ دارد.

تمرین ۶. با قرار دادن $f(z) = a_n z^n$ و $g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}$ و استفاده از قضیه روشه ثابت کنید هر چندجمله‌ای $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$ $(a_n \neq 0)$ که $n \geq 1$، با احتساب چندگانگی‌ها، دقیقاً n صفر دارد. بدین ترتیب برای قضیه اساسی جبر، اثبات دیگری ارائه دهید.

$P(z) = \underbrace{a_n z^n}_{f(z)} + \underbrace{a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0}_{g(z)}$ $= f(z) + g(z)$

$a_n \neq 0$

پاسخ ۶. هدف این است که نشان دهیم در یک دایره به اندازه کافی بزرگ مانند $C : |z| = R$، تابع $f(z)$ بر $g(z)$ غالب است، یعنی $|f(z)| > |g(z)|$. برای روی مرز این دایره داریم $|f(z)| = |a_n z^n| = |a_n| R^n$ و برای $g(z)$ با استفاده از نامساوی مثلثی داریم:



$$|g(z)| = |a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1}| \leq |a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_{n-1}| R^{n-1}$$

حال نسبت $|g(z)|$ به $|f(z)|$ را بررسی می‌کنیم:

$$\frac{|g(z)|}{|f(z)|} \leq \frac{|a_0| + |a_1| R + \cdots + |a_{n-1}| R^{n-1}}{|a_n| R^n} = \frac{1}{|a_n|} \left(\frac{|a_0|}{R^n} + \frac{|a_1|}{R^{n-1}} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{R} \right) \quad ? < 1$$

$\frac{1}{R} \to 0$

هنگامی که $R \to \infty$، تمام کسرهای داخل پرانتز به صفر میل می‌کنند. بنابراین $\lim_{R \to \infty} \frac{|g(z)|}{|f(z)|} = 0$. این یعنی می‌توان شعاع R را به قدری بزرگ انتخاب کرد که روی دایره $|z| = R$ نامساوی $\frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$ یا به عبارتی $|f(z)| > |g(z)|$ برقرار باشد.

طبق قضیه روشه، چون شرط $|f(z)| > |g(z)|$ روی دایره C برقرار است، تعداد ریشه‌های تابع $f(z) + g(z)$ (که همان $P(z)$ است) با تعداد ریشه‌های تابع $f(z)$ در داخل دایره C برابر خواهد بود. از آنجا که $f(z) = a_n z^n$ دقیقاً n ریشه (در مبدا، با احتساب چندگانگی) دارد، پس $P(z)$ نیز در داخل دایره $|z| = R$ دقیقاً n ریشه دارد. چون R می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد، نتیجه می‌گیریم این چندجمله‌ای در کل صفحه مختلط دقیقاً n ریشه دارد. این همان بیان قضیه اساسی جبر است.

تمرین ۷. تابع $f(z) = \frac{8a^3 z^2}{(z^2 + a^2)^3}$، $a > 0$ را به شکل زیر بنویسید:

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - ai)^3} \quad \text{که در آن} \quad \phi(z) = \frac{8a^3 z^2}{(z + ai)^3}$$

بگویید چرا $\phi(z)$ حول $z=ai$ نمایش سری تیلور دارد و سپس با استفاده از این مطلب نشان دهید که قسمت اصلی f در این نقطه عبارت است از:

principal value Taylore Serie exp

$$\frac{\phi''(ai)/۲}{z-ai}+\frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^۲}+\frac{\phi(ai)}{(z-ai)^۳}=\underbrace{\frac{-i/۲}{z-ai}-\frac{a/۲}{(z-ai)^۲}-\frac{a^۲i}{(z-ai)^۳}}$$

پاسخ ۷. تابع $\phi(z)=\frac{۸a^۳z^۲}{(z+ai)^۳}$ تنها در نقطه $z=-ai$ تحلیلی نیست (دارای قطب است). بنابراین، این تابع در هر همسایگی از نقطه $z=ai$ که شامل نقطه $z=-ai$ نباشد (یعنی دیسک باز $|z-ai|<۲a$)، تحلیلی است. چون $\phi(z)$ در $z=ai$ تحلیلی است، در این نقطه دارای بسط سری تیلور به شکل زیر است:

$$f(z)=\frac{۸a^۳z^۲}{(z^۲+a^۲)^۳}\rightarrow z=\pm ai$$

$$\phi(z)=\phi(ai)+\phi'(ai)(z-ai)+\frac{\phi''(ai)}{۲!}(z-ai)^۲+\frac{\phi'''(ai)}{۳!}(z-ai)^۳+\ldots$$ ✓ سری تیلور

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

حال با جایگذاری این سری در رابطه $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-ai)^۳}$ داریم:

جایگذاری

$$f(z)=\underbrace{\frac{\phi(ai)}{(z-ai)^۳}+\frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^۲}+\frac{\phi''(ai)/۲}{(z-ai)}}+\frac{\phi'''(ai)}{۶}+\ldots$$

سری لوران

$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(z-z_0)^n}$$

قسمت اصلی (Principal Part) سری لوران شامل جملاتی است که توان مخرج آن‌ها مثبت است. بنابراین قسمت اصلی $f(z)$ حول $\underbrace{z=ai}$ برابر است با:

$$\underset{f(z)}{\text{Part Principal}}=\frac{\phi''(ai)/۲}{z-ai}+\frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^۲}+\frac{\phi(ai)}{(z-ai)^۳}$$ ✓

با محاسبه مقادیر مشتقات در $z=ai$ به دست می‌آوریم:

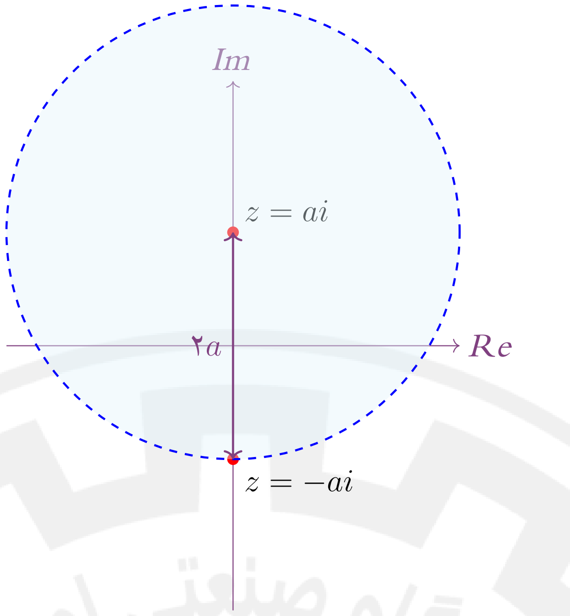
$$\phi(ai)=\frac{۸a^۳(ai)^۲}{(۲ai)^۳}=\frac{-۸a^۵}{-۸ia^۳}=-a^۲i$$

$$\phi'(ai)=-\frac{a}{۲}$$

$$\phi''(ai)=-i$$

با جایگذاری این مقادیر، تساوی داده شده در صورت سوال به دست می‌آید:

$$\frac{-i/۲}{z-ai}-\frac{a/۲}{(z-ai)^۲}-\frac{a^۲i}{(z-ai)^۳}$$



دیسک همگرایی سری تیلور $\phi(z)$ حول نقطه $z=ai$ با شعاع $R=2a$

$0<|z-z_0|<\delta$ نا

تمرین ۸. تابع $f(z)=e^{1/z}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید $z_0=0$ برای این تابع یک تکین اساسی است. بخش اول

(ب) با استفاده از قضیه کازوراتی–وایرشتراس توضیح دهید چرا تصویر هر همسایگی سوراخ‌شده از مبدأ تحت این نگاشت، در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ چگال است. به طور خاص، نشان دهید که تابع می‌تواند به هر مقدار غیرصفر $w_0\in\mathbb{C}$ به طور دلخواه نزدیک شود. $z_0=0$ $f(z)=e^{1/z}$

$H(D)=\{f(z)\mid z\in D\}$ بخش دوم

پاسخ ۸. **(الف)** برای تعیین نوع تکین در $z_0=0$، بسط لوران تابع را حول این نقطه می‌نویسیم. با استفاده از بسط تیلور تابع نمایی $e^u=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}$ و قرار دادن $u=1/z$ داریم:

$$f(z)=e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/z)^n}{n!}=1+\overbrace{\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\dots}^{PV}$$

از آنجایی که قسمت اصلی (principal part) این سری لوران، یعنی جملات با توان منفی z، بی‌نهایت جمله دارد، نقطه $z_0=0$ یک تکین اساسی است. $z_0=0$ نقطه

حذف **ب)** قضیه کازوراتی–وایرشتراس بیان می‌کند که اگر z_0 یک تکین اساسی برای تابع f باشد، آنگاه تصویر هر همسایگی سوراخ‌شده $D=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-z_0|<\delta\}$ تحت نگاشت f (یعنی مجموعه $f(D)$) در $\mathbb{C}$ چگال است. چگال بودن به این معناست که برای هر نقطه $w_0\in\mathbb{C}$ و هر $\epsilon>0$، یک نقطه $z\in D$ وجود دارد به طوری که $|f(z)-w_0|<\epsilon$.
در این مسئله، چون $z_0=0$ یک تکین اساسی است، بنا بر این قضیه، مجموعه مقادیر $e^{1/z}$ در هر همسایگی سوراخ‌شده از مبدأ، در کل صفحه مختلط چگال است.

$\exists z_0 \quad e^{1/z_0} = w_0 \quad \forall\, 0 \neq w_0 \in \mathbb{C}$

برای بخش دوم، می‌توانیم حتی نتیجه‌ای قوی‌تر را مستقیماً نشان دهیم. می‌خواهیم معادله $e^{۱/z} = w_۰$ را برای $w_۰ \neq ۰$ حل کنیم. با لگاریتم گرفتن از طرفین داریم:

$|w_0| e^{i(\arg(w_0) + 2k\pi)}$

$$\frac{۱}{z} = \log(w_۰) = \ln|w_۰| + i(\arg(w_۰) + ۲k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین، مجموعه جواب‌ها به صورت زیر است:

fixed k

$$z_k = \frac{۱}{\ln|w_۰| + i(\arg(w_۰) + ۲k\pi)} \rightarrow |z_k| = \frac{\cdots}{(\mathrm{Re} + \mathrm{Im})^2}$$

وقتی $k \to \infty$، مخرج کسر به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در نتیجه $|z_k| \to ۰$. این بدان معناست که می‌توانیم با انتخاب k به اندازه کافی بزرگ، نقطه‌ای مانند z_k پیدا کنیم که به طور دلخواه به مبدأ نزدیک باشد و در عین حال $f(z_k) = w_۰$. این نشان می‌دهد که تابع نه تنها به $w_۰$ نزدیک می‌شود، بلکه دقیقاً به آن مقدار نیز می‌رسد.

تمرین ۹. تابع $g(z) = \frac{۱}{z^۳}$ را در نظر بگیرید.

(الف) نوع نقطه تکین $z_۰ = ۰$ را مشخص کنید. تکین اساسی نیست بلکه قطب رخ شده است

(ب) نشان دهید که تصویر هر همسایگی سوراخ‌شده از $z_۰ = ۰$ تحت نگاشت g در $\mathbb{C}$ چگال **نیست**. چرا این موضوع با قضیه کازوراتی–وایرشتراس تناقض ندارد؟

پاسخ ۹.

الف) تابع $g(z)$ از قبل به صورت بسط لوران حول $z = ۰$ نوشته شده است. این بسط تنها یک جمله دارد که همان $z^{-۳}$ است. چون بزرگترین توان منفی متناهی است (برابر ۳)، $z_۰ = ۰$ یک قطب از مرتبه ۳ است.

ب) یک همسایگی سوراخ‌شده از مبدأ را به صورت $D = \{z \in \mathbb{C} \mid ۰ < |z| < \delta\}$ برای یک $\delta > ۰$ دلخواه در نظر بگیرید. برای هر $z \in D$ داریم $|z| < \delta$. در نتیجه:

$$|g(z)| = \left|\frac{۱}{z^۳}\right| = \frac{۱}{|z|^۳} > \frac{۱}{\delta^۳}$$

این نامساوی نشان می‌دهد که قدر مطلق تمام مقادیر تابع در این همسایگی، از یک عدد مثبت ($۱/\delta^۳$) بزرگتر است. در نتیجه، تصویر $g(D)$ نمی‌تواند در $\mathbb{C}$ چگال باشد. به عنوان مثال، هیچ یک از مقادیر تابع نمی‌تواند به نقطه $w_۰ = ۰$ نزدیک شود. قرص باز $B(۰, ۱/\delta^۳)$ هیچ اشتراکی با $g(D)$ ندارد.

این موضوع با قضیه کازوراتی–وایرشتراس تناقض ندارد، زیرا آن قضیه **فقط** برای نقاط تکین اساسی برقرار است. در حالی که $z_۰ = ۰$ برای تابع $g(z)$ یک قطب است، نه یک تکین اساسی. برای قطب‌ها، رفتار تابع متفاوت است و داریم $\lim_{z\to z_۰} |f(z)| = \infty$.

ناحیه Domain ↔ حوزه

تابع هولومورفیک: تابعی است که در هر نقطه از یک ناحیه باز در صفحه مختلط، مشتق‌پذیر (و در نتیجه تحلیلی) باشد. این توابع در ناحیه تعریف خود هیچ‌گونه نقطه تکینی ندارند. اگر تابعی در کل صفحه مختلط هولومورفیک باشد، به آن **تابع تام** می‌گویند. entire function

مثال: توابع $f(z) = e^z$، $g(z) = \sin(z)$ و چندجمله‌ای‌ها مانند $h(z) = z^۲ + ۲z + ۱$ در کل $\mathbb{C}$ هولومورفیک هستند.

$\mathbb{C}$ $\quad P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$

تابع مرومورفیک: تابعی است که در یک ناحیه تحلیلی (هولومورفیک) است به جز در مجموعه‌ای از نقاط تکین منفرد که همگی از نوع **قطب** هستند. به عبارتی، تابع مرومورفیک، تکین اساسی در ناحیه خود ندارد و می‌توان آن را به صورت خارج‌قسمت دو تابع هولومورفیک (که مخرج صفرِ متحد نیست) بیان کرد.

$\left\{ \frac{P(z)}{q(z)} \right\}$ $P(z), q(z)$ hol... $q(z) \neq 0$

مثال: تابع $f(z) = \frac{e^z}{z}$ در کل $\mathbb{C}$ به جز در $z = ۰$ (که یک قطب ساده است) هولومورفیک است، بنابراین در $\mathbb{C}$ یک تابع مرومورفیک محسوب می‌شود.

تمرین ۱۰. *نشان دهید تابع* $f(z) = \frac{z^۲+۱}{(z-۱)^۲(z+۲)}$ *در صفحه مختلط مرومورفیک است و قطب‌ها و مرتبه آن‌ها را مشخص کنید.*

$a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

پاسخ ۱۰. *صورت و مخرج این تابع چندجمله‌ای هستند (که توابعی تام می‌باشند). چون مخرج صفر متحد نیست،* $f(z)$ *یک تابع گویا و در نتیجه در* $\mathbb{C}$ *مرومورفیک است. نقاط تکین تابع، ریشه‌های مخرج هستند: ۱.* $z = ۱$*: چون ریشه صورت نیست و در مخرج با توان ۲ ظاهر شده است، یک قطب مرتبه دوم است. ۲.* $z = -۲$*: چون ریشه صورت نیست و در مخرج با توان ۱ ظاهر شده است، یک قطب ساده (مرتبه اول) است.*

تمرین ۱۱. *فرض کنید* $f(z)$ *یک تابع مرومورفیک در داخل و روی منحنی بسته و ساده* C *باشد و روی* C *هیچ صفر یا قطبی نداشته باشد. اگر* Z *تعداد صفرها و* P *تعداد قطب‌های* $f(z)$ *در داخل* C *(با احتساب مراتب) باشد، بر اساس اصل آرگومان نشان دهید:*

$(z-3)^2 = 0$, $z = 3$

$$\frac{۱}{۲\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = Z - P$$

$\to Z = P\ ?$

پاسخ ۱۱. *تابع* $\frac{f'(z)}{f(z)}$ *در داخل* C *تحلیلی است به جز در نقاطی که* $f(z)$ *صفر یا قطب دارد. اگر* $f(z)$ *در* $z_۰$ *یک صفر از مرتبه* n *داشته باشد، بسط تیلور آن* $f(z) = (z - z_۰)^n g(z)$ *است که* $g(z_۰) \neq ۰$*. آنگاه* $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-z_۰} + \frac{g'(z)}{g(z)}$*. بنابراین مانده این کسر در* $z_۰$ *برابر* n *است. اگر* $f(z)$ *در* z_p *یک قطب از مرتبه* m *داشته باشد،* $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_p)^m}$*. آنگاه* $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z-z_p} + \frac{h'(z)}{h(z)}$*. بنابراین مانده در* z_p *برابر* $-m$ *است. طبق قضیه مانده‌ها، انتگرال برابر است با مجموع مانده‌ها ضربدر* $۲\pi i$*، که حاصل آن* $Z - P$ *(تعداد کل صفرها منهای قطب‌ها) خواهد شد.*

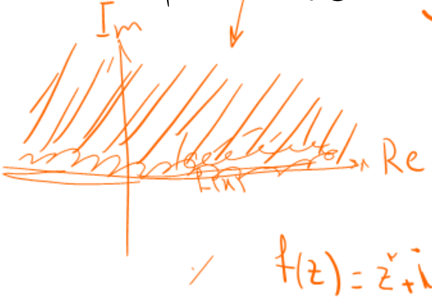
$\frac{1}{2\pi i}\oint f(z)\,dz$ = ... مانده‌ها

$n - m$

تمرین ۱۲. *قطب‌های تابع* $f(z) = \frac{۱}{\sin(z)}$ *را بیابید و نشان دهید این تابع در صفحه مختلط مرومورفیک است.*

پاسخ ۱۲. *صورت تابع عدد ثابت ۱ است (تابع تام) و مخرج* $\sin(z)$ *نیز یک تابع تام است. خارج‌قسمت دو تابع تام همواره مرومورفیک است (به شرطی که مخرج صفرِ متحد نباشد). نقاط تکین جایی رخ می‌دهند که* $\sin(z) = ۰$*. در صفحه مختلط، این ریشه‌ها دقیقاً روی محور حقیقی و در نقاط* $z = k\pi$ *(برای هر* $k \in \mathbb{Z}$*) قرار دارند. چون مشتق مخرج (*$\cos(z)$*) در این نقاط برابر* $\pm۱ \neq ۰$ *است، تمامی این نقاط قطب‌های ساده (مرتبه اول) برای تابع* $f(z)$ *هستند.*

[اصل بازتاب شوارتس] فرض کنید تابع f در ناحیه‌ای از نیم‌صفحهٔ بالایی $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > ۰\}$ تحلیلی باشد و تا محور حقیقی به طور پیوسته امتداد یابد. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x) \in \mathbb{R}$، آنگاه می‌توان f را به نیم‌صفحهٔ پایینی به صورت تحلیلی امتداد داد به طوری که



$$F(z) = \begin{cases} f(z), & \mathrm{Im}(z) \geq ۰, \to \text{نیم‌صفحه بالایی} \\ \overline{f(\overline{z})}, & \mathrm{Im}(z) < ۰. \to \text{نیم‌صفحه پایینی} \end{cases}$$

$f(z) = z^2 + i \to f(\bar z) = \bar z^2 + i \to \overline{f(\bar z)} = \overline{\bar z^2 + i} = \bar{\bar z}^2 - i = z^2 - i$

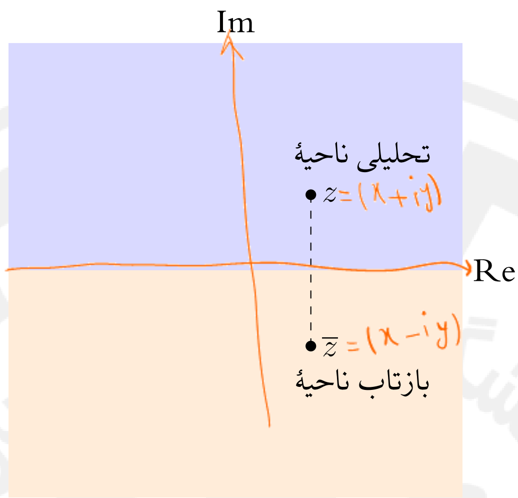
$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i(2xy)$

$\bar{z}^2=(x-iy)^2=(x^2-y^2)-i(2xy)=\overline{z^2}$ $\quad \bar{z}^2=\overline{z^2}$ $\quad \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$

در این صورت F تابعی تحلیلی روی ناحیهٔ متقارن نسبت به محور حقیقی خواهد بود.

توضیح: اصل بازتاب بیان می‌کند که اگر یک تابع تحلیلی روی مرزی مانند محور حقیقی مقادیر حقیقی اختیار کند، آنگاه رفتار آن در یک طرف مرز تعیین‌کنندهٔ رفتار آن در طرف دیگر مرز است. به عبارت دیگر، می‌توان تابع را نسبت به آن مرز «بازتاب» داد و یک تابع تحلیلی در ناحیهٔ بزرگ‌تری به دست آورد. در این حالت اگر نقطه‌ای مانند z در نیم‌صفحهٔ بالا باشد، نقطهٔ بازتابی آن نسبت به محور حقیقی $\overline{z}$ خواهد بود و مقدار تابع در آن نقطه از رابطه $f(\overline{z})=\overline{f(z)}$ به دست می‌آید.

$f(z)=z^2+i \rightarrow f(\bar z)=\bar z^2-i$



$f(\bar z)=\overline{f(z)}$

$f(z)=z^2$ ✓

$f(z)=z^2+i$ ✗

تمرین ۱۳. *فرض کنید تابع f در نیم‌صفحهٔ بالایی $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}\, z>0\}$ تحلیلی باشد و تا محور حقیقی به طور پیوسته امتداد یابد، به طوری که*

$$f(x)\in\mathbb{R} \qquad \text{برای هر } x\in\mathbb{R}.$$

با استفاده از اصل بازتاب شوارتس، نشان دهید که می‌توان f را به تابعی تحلیلی روی کل صفحه مختلط امتداد داد و فرمول این امتداد را به دست آورید.

پاسخ ۱۳. *طبق اصل بازتاب شوارتس، اگر تابعی در نیم‌صفحهٔ بالایی تحلیلی باشد و روی محور حقیقی مقادیر حقیقی اختیار کند، آنگاه امتداد آن به نیم‌صفحهٔ پایینی به صورت*

$\forall x\in\mathbb{R} \xrightarrow{\text{I.}} f(x)\in\mathbb{R}$

$$F(z)=\overline{f(\overline{z})}$$

تعریف می‌شود. تعریف می‌کنیم

$$F(z)=\begin{cases} f(z) & \text{اگر } \mathrm{Im}\, z\geq 0, \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{اگر } \mathrm{Im}\, z<0. \end{cases}$$

✓ نیم‌صفحهٔ بالا

✓ نیم‌صفحهٔ پایین

چون برای $x\in\mathbb{R}$ داریم $f(x)\in\mathbb{R}$، پس

$$\overline{f(\overline{x})}=\overline{f(x)}=f(x),$$

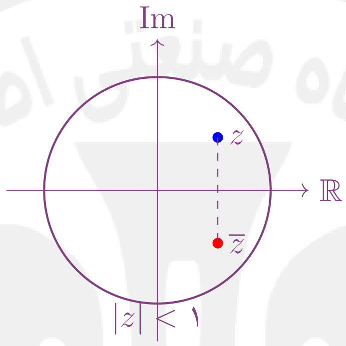
در نتیجه دو تعریف روی محور حقیقی با هم سازگارند. بنابراین F روی کل صفحه تحلیلی است و امتداد تحلیلی f می‌باشد.

تمرین ۱۴. فرض کنید تابع f در دیسک واحد $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < ۱\}$ حلیلی باشد و روی قطر حقیقی دیسک یعنی $(-۱, ۱)$ مقادیر حقیقی بگیرد. نشان دهید که برای هر $z \in D$ رابطهٔ $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ زیر برقرار است.

پاسخ ۱۴. چون f در دیسک واحد تحلیلی است و روی بازهٔ حقیقی $(-۱, ۱)$ مقادیر حقیقی می‌گیرد، شرایط اصل بازتاب شوارتس برقرار است. طبق این اصل، اگر z در دیسک باشد، بازتاب آن نسبت به محور حقیقی یعنی $\overline{z}$ نیز در دیسک قرار دارد (زیرا $|z| < ۱$ نتیجه می‌دهد $|\overline{z}| < ۱$). از اصل بازتاب نتیجه می‌شود:

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

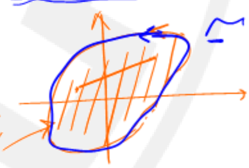
این رابطه نشان می‌دهد که تصویر نقاط مزدوج مختلط نیز نسبت به محور حقیقی متقارن است.



$\oint_c f(z)\,dz = ۰$

تعمیم قضیهٔ کوشی: فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{C}$ ناحیه‌ای با مرز قطعه‌وار هموار باشد و f تابعی تحلیلی روی Ω و پیوسته روی $\overline{\Omega}$ باشد. اگر $\partial\Omega$ شامل تعداد متناهی منحنی بستهٔ ساده باشد، آنگاه داریم $\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = ۰$. به عبارت دیگر، اگر $\partial\Omega = \gamma_۱ + \gamma_۲ + \cdots + \gamma_n$ مجموع مؤلفه‌های مرزی ناحیه باشد (با جهت مثبت نسبت به ناحیه)، آنگاه

$$\int_{\gamma_۱} f(z)\,dz + \int_{\gamma_۲} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz = ۰.$$



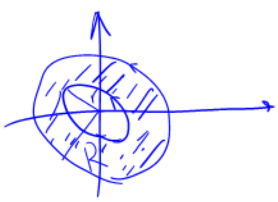
ناحیه (همبند باز)

توضیح: این نتیجه تعمیمی از قضیهٔ کوشی برای نواحی چندهمبند است. در حالت کلاسیک، اگر γ یک منحنی بستهٔ ساده در ناحیه‌ای باشد که f در آن تحلیلی است، آنگاه

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = ۰. \qquad \oint$$

(منحنی بسته ساده)

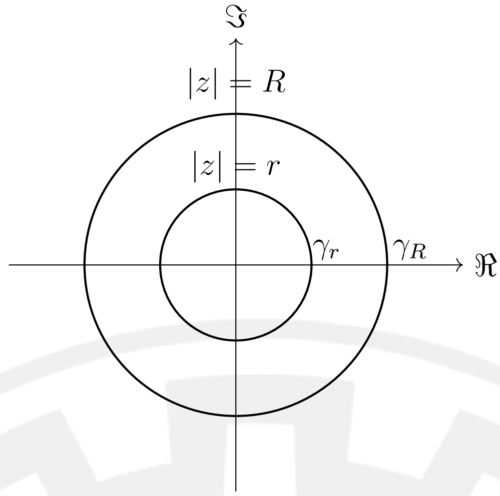
در حالت تعمیم‌یافته، ناحیه ممکن است چندین مؤلفهٔ مرزی داشته باشد (مانند طوقه‌ها). در این صورت مجموع انتگرال‌های تابع روی تمام مؤلفه‌های مرزی با در نظر گرفتن جهت مناسب برابر صفر است. به طور خاص اگر ناحیه یک طوقه باشد:



$$\Omega = D(۰, R) \setminus \overline{D(۰, r)},$$

آنگاه مرز شامل دو دایره است و نتیجه می‌دهد:

$$\int_{|z|=R} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} f(z)\,dz$$



تمرین ۱۵. (تعمیم قضیهٔ کوشی به فرمول کوشی برای مشتقات) فرض کنید f روی دیسک بستهٔ $\overline{D(a,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \le R\}$ تحلیلی باشد. نشان دهید برای هر عدد صحیح $n \ge ۰$ و هر z با $|z-a| < R$ داریم

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+۱}}\,d\zeta.$$

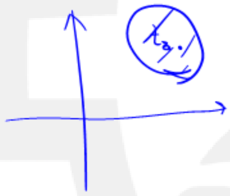
$|a_1+a_2+\dots+a_n| \le |a_1|+\dots+|a_n|$

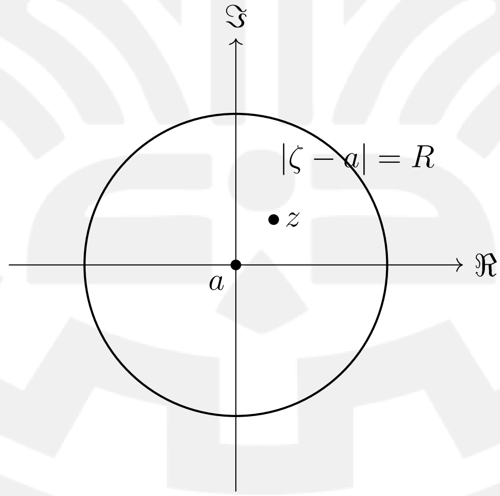
$|\int f| \le \int |f|$

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

سپس نتیجه بگیرید که اگر $|f(\zeta)| \le M$ روی دایرهٔ $|\zeta-a| = R$، آنگاه

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\,M}{R^n}.$$





پاسخ ۱۵. چون f روی و داخل دایرهٔ $|\zeta-a| = R$ تحلیلی است، طبق فرمول انتگرالی کوشی برای هر z با $|z-a| < R$ داریم

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

[illegible]

اکنون نسبت به z مشتق می‌گیریم. چون انتگرال نسبت به پارامتر z یکنواخت همگراست، می‌توان مشتق را به داخل انتگرال برد:

$$f'(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R} f(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{۱}{\zeta-z}\right)d\zeta = \frac{۱}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^۲}\,d\zeta.$$

با تکرار این فرآیند و استقرا نتیجه می‌گیریم:

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+۱}}\,d\zeta.$$

اکنون برای $z=a$ می‌نویسیم:

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{۲\pi i}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+۱}}\,d\zeta.$$

با گرفتن قدرمطلق و استفاده از نامساوی مثلثی:

$$|f^{(n)}(a)|\leq\frac{n!}{۲\pi}\int_{|\zeta-a|=R}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a|^{n+۱}}\,|d\zeta|.$$

چون $|\zeta-a|=R$ و طول مسیر برابر $۲\pi R$ است و $|f(\zeta)|\leq M$،

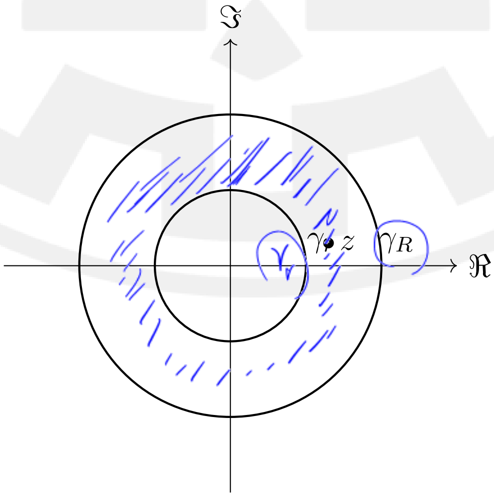
$$|f^{(n)}(a)|\leq\frac{n!}{۲\pi}\cdot\frac{M}{R^{n+۱}}\cdot ۲\pi R=\frac{n!\,M}{R^n}.$$

تمرین ۱۶. (تعمیم قضیهٔ کوشی به نواحی چندهمبند) فرض کنید f روی ناحیهٔ

$$\Omega=D(۰,R)\setminus\overline{D(۰,r)},\qquad ۰<r<R,$$

تحلیلی باشد و تا مرز به طور پیوسته امتداد یابد. نشان دهید اگر γ_R دایرهٔ $|z|=R$ با جهت مثبت و γ_r دایرهٔ $|z|=r$ با جهت مثبت باشد، آنگاه برای هر z با $r<|z|<R$ داریم

$$f(z)=\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{۱}{۲\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$



پاسخ ۱۶. ناحیهٔ Ω یک طوقه (ناحیهٔ چندهمبند) است. مرز آن شامل دو مؤلفه است: دایرهٔ بیرونی γ_R با جهت مثبت و دایرهٔ داخلی که در جهت مثبت نسبت به ناحیه باید در جهت منفی پیمایش شود. طبق فرمول کلی کوشی برای نواحی با مرز

قطعه‌وار هموار داریم:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\qquad r<|z|<R.$$

اما

$$\partial\Omega=\gamma_R-\gamma_r,$$

زیرا جهت مؤلفهٔ داخلی برعکس جهت مثبت معمول است. بنابراین

$$\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

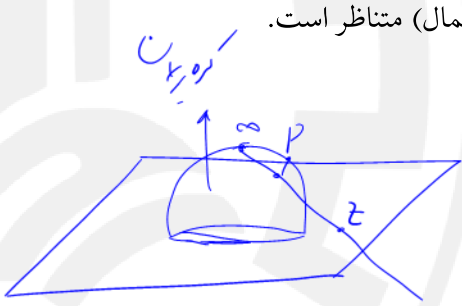
در نتیجه

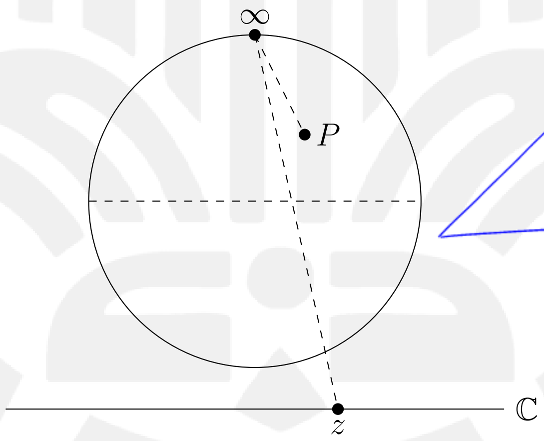
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

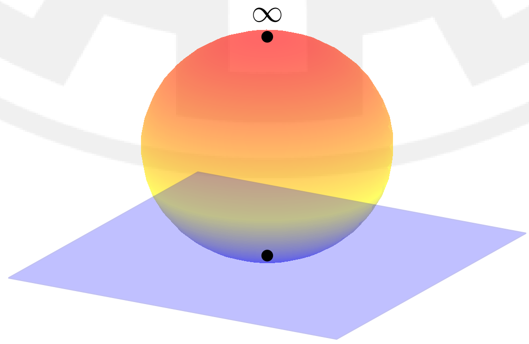
[صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته] صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته با افزودن نقطه‌ای در بی‌نهایت به صفحهٔ مختلط تعریف می‌شود:

$$\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

این فضا را **کرهٔ ریمان** نیز می‌نامند، زیرا از طریق تصویر استریوگرافیک با یک کره در فضای سه‌بعدی متناظر است. در این نمایش، قطب شمال کره متناظر با نقطهٔ ∞ در نظر گرفته می‌شود و هر نقطهٔ $z\in\mathbb{C}$ با نقطه‌ای روی کره (به جز قطب شمال) متناظر است.







تمرین ۱۷. *نشان دهید اگر $f(z)=\frac{1}{z}$ روی $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ تعریف شود، آنگاه می‌توان آن را به صورت تابعی روی صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ به گونه‌ای تعریف کرد که $f(0)=\infty$ و $f(\infty)=0$. توضیح دهید چرا در این صورت f یک نگاشت یک‌به‌یک از $\widehat{\mathbb{C}}$ به خودش است.*

$z \to \infty \quad f(z)=\frac{1}{z} \to 0$

$z \to 0 \quad f(z)=\frac{1}{z} \to \infty$

پاسخ ۱۷. تابع $f(z)=\frac{1}{z}$ برای همهٔ $z \neq 0$ تعریف شده است. وقتی $z \to 0$ داریم $|f(z)|=\frac{1}{|z|} \to \infty$، بنابراین در صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته تعریف می‌کنیم $f(0)=\infty$. از طرف دیگر اگر $|z| \to \infty$ داشته باشیم آنگاه $f(z)=\frac{1}{z} \to 0$، پس $f(\infty)=0$. اگر $f(z_1)=f(z_2)$ و هر دو متناهی باشند، آنگاه $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_2}$ و نتیجه می‌شود $z_1=z_2$. همچنین تنها نقطه‌ای که به ∞ نگاشته می‌شود برابر 0 است و تنها نقطه‌ای که به 0 نگاشته می‌شود برابر ∞ است، بنابراین f یک تناظر یک‌به‌یک روی $\widehat{\mathbb{C}}$ است.

$f: \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 1-1 injective

تمرین ۱۸. نشان دهید برای هر چندجمله‌ای ناصفر $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ با $a_n \neq 0$ در صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته داریم $P(\infty)=\infty$.

پاسخ ۱۸. می‌نویسیم $P(z)=z^n\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\frac{a_{n-2}}{z^2}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)$. وقتی $|z| \to \infty$ داشته باشیم، همهٔ جمله‌های $\frac{a_k}{z^{n-k}} \to 0$ میل می‌کنند، بنابراین عبارت داخل پرانتز به a_n میل می‌کند و در نتیجه $|P(z)| \sim |a_n||z|^n \to \infty$. پس در صفحهٔ مختلط گسترش‌یافته تعریف می‌کنیم $P(\infty)=\infty$.

تمرین ۱۹. نشان دهید تابع $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ با شرط $ad-bc \neq 0$ یک نگاشت از $\widehat{\mathbb{C}}$ به خودش است و اگر $c \neq 0$ باشد داریم $f(\infty)=\frac{a}{c}$.

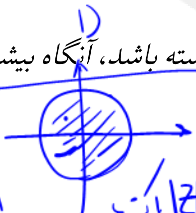
پاسخ ۱۹. تابع $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ برای همهٔ نقاطی که $cz+d \neq 0$ تعریف شده است. نقطه‌ای که مخرج را صفر می‌کند برابر $z=-\frac{d}{c}$ است و در آن نقطه مقدار تابع به ∞ میل می‌کند، پس تعریف می‌کنیم $f(-\frac{d}{c})=\infty$. برای محاسبهٔ مقدار در ∞ صورت و مخرج را بر z تقسیم می‌کنیم و می‌نویسیم $f(z)=\frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}}$. وقتی $|z| \to \infty$ داشته باشیم، $\frac{b}{z} \to 0$ و $\frac{d}{z} \to 0$، بنابراین $\lim_{z\to\infty} f(z)=\frac{a}{c}$. در نتیجه تعریف می‌کنیم $f(\infty)=\frac{a}{c}$ و این تابع یک نگاشت از $\widehat{\mathbb{C}}$ به $\widehat{\mathbb{C}}$ است که به آن تبدیل موبیوس گفته می‌شود.

$f(z) \longrightarrow D$ تحلیلی $\longrightarrow |f(z)|$ نمی‌تواند مقدار بیشینه را بگیرد

قضیه ۱ (اصل ماکزیمم اندازه). فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{C}$ یک ناحیهٔ همبند باشد و $f:\Omega \to \mathbb{C}$ تابعی تحلیلی و ناثابت باشد. آنگاه تابع اندازهٔ آن یعنی $|f(z)|$ نمی‌تواند در هیچ نقطه‌ای از داخل ناحیهٔ Ω به بیشینهٔ موضعی برسد.
به بیان دقیق‌تر، اگر عدد $z_0 \in \Omega$ به گونه‌ای باشد که $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ برای همهٔ zهای موجود در همسایگی‌ای از z_0 برقرار باشد، آنگاه f تابعی ثابت است.

$z_0 \in D$ $|f(z_0)|$

نتیجه ۱. اگر Ω ناحیه‌ای کراندار با مرز قطعه‌وار هموار باشد و f روی Ω تحلیلی و روی $\overline{\Omega}$ پیوسته باشد، آنگاه بیشینهٔ مقدار $|f(z)|$ روی $\overline{\Omega}$ حتماً روی مرز $\partial\Omega$ حاصل می‌شود؛ یعنی



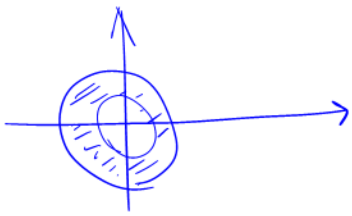
$f(z)=z \quad |z|<1 \quad |f(z)|=|z|<1 \quad |z|=1$

$$\max_{z\in\overline{\Omega}}|f(z)|=\max_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$

چون ناحیه در نظر باز است $|z|=1$ جزو D نیست

تبصره ۱. نتیجهٔ مهم اصل ماکزیمم این است که اگر تابع تحلیلی در یک ناحیهٔ همبند دارای بیشینهٔ موضعی در داخل ناحیه باشد، آنگاه آن تابع الزاماً ثابت است. این خاصیت یکی از تفاوت‌های اساسی میان توابع تحلیلی مختلط و توابع مشتق‌پذیر حقیقی است.

پس این مقدار ماکزیمم خارج از ناحیه D است.



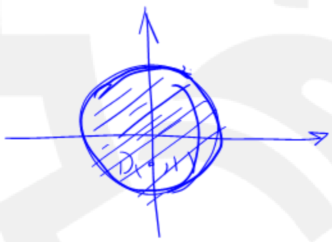
$\forall z \in \Omega$

تمرین ۲۰. فرض کنید f تابعی تحلیلی در دیسک واحد $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < ۱\}$ باشد و برای همهٔ z با $|z| < ۱$ داشته باشیم $|f(z)| \leq ۵$. اگر عددی $z_۰$ در دیسک واحد وجود داشته باشد به طوری که $|f(z_۰)| = ۵$، نشان دهید که f تابعی ثابت است.

پاسخ ۲۰. طبق فرض، تابع f در ناحیهٔ همبند D تحلیلی است و داریم $|f(z)| \leq ۵$ برای همهٔ $z \in D$. همچنین فرض شده است که نقطه‌ای $z_۰ \in D$ وجود دارد به طوری که $|f(z_۰)| = ۵$.
بنابراین مقدار $|f(z)|$ در نقطهٔ $z_۰$ به بیشینهٔ خود در داخل ناحیه رسیده است. طبق اصل ماکزیمم اندازه، اگر تابعی تحلیلی در یک ناحیهٔ همبند باشد و اندازهٔ آن در نقطه‌ای از داخل ناحیه به بیشینهٔ موضعی برسد، آنگاه آن تابع باید ثابت باشد.
پس نتیجه می‌گیریم که f تابعی ثابت در کل دیسک واحد است.

تمرین ۲۱. فرض کنید f تابعی تحلیلی در دیسک بستهٔ $\overline{D(۰,۱)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq ۱\}$ باشد و روی مرز دیسک یعنی $|z| = ۱$ داشته باشیم $|f(z)| \leq ۲$. نشان دهید برای همهٔ z با $|z| < ۱$ نیز داریم $|f(z)| \leq ۲$.

پاسخ ۲۱. تابع f در دیسک $D(۰,۱)$ تحلیلی و روی دیسک بسته پیوسته است. طبق اصل ماکزیمم اندازه، بیشینهٔ مقدار $|f(z)|$ روی مجموعهٔ بستهٔ $\overline{D(۰,۱)}$ نمی‌تواند در داخل دیسک حاصل شود مگر اینکه تابع ثابت باشد. بنابراین بیشینهٔ $|f(z)|$ حتماً روی مرز دیسک یعنی $|z| = ۱$ به دست می‌آید.
طبق فرض مسئله، برای همهٔ نقاط مرز داریم $|f(z)| \leq ۲$، پس بیشینهٔ مقدار $|f(z)|$ روی کل دیسک بسته نیز حداکثر برابر ۲ است.
در نتیجه برای هر z با $|z| < ۱$ خواهیم داشت $|f(z)| \leq ۲$.



$\overline{D}(0,1)$

$\forall z \in D(0,1)$
بدون در نظر گرفتن مرز
$\to |z| < 1$

بستار مجموعه
$\overline{D(0,1)}$
با در نظر گرفتن مرز
$\to |z| \leq 1$