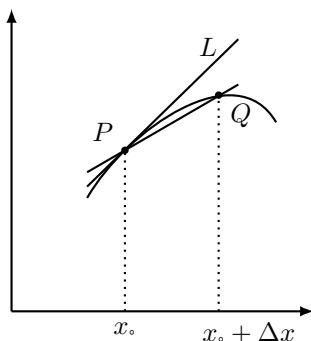


## فصل دوم

### مشتق

در این بخش مفهوم مشتق توابع یک متغیره را مطرح کرده، روش تعیین مشتق توابع، یا اصطلاحاً مشتق‌گیری، را مشاهده می‌کنیم. اما قبل از شروع این بحث، ابتدا دو بحث تاریخی که در ارائه تعریف مشتق نقش مهمی داشته‌اند را بیان می‌کنیم.

بحث اول مفهوم هندسی شیب خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه است. فرض کنیم  $f$  تابعی پیوسته تعریف شده بر یک همسایگی نقطه  $x_0 \in \mathbb{R}$  و  $C \subset \mathbb{R}^2$  نمودار این تابع باشد. فرض کنیم  $P \in C$  نقطه نظیر  $x_0$  و  $Q \in C$  نقطه نظیر  $x_0 + \Delta x$  باشد. به این ترتیب  $P$  نقطه‌ای به مختصات  $(x_0, f(x_0))$  و  $Q$  نیز نقطه‌ای به مختصات  $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$  خواهد بود. همچنین فرض کنیم  $L$  خط مماس بر منحنی  $C$  در نقطه  $P$  وجود داشته باشد. (توجه کنید در اینجا ما مفهوم خط مماس را تعریف نکرده، فقط به درک شهودی این خط بسنده می‌کنیم.)



با در نظر گرفتن خط گذرنده از دو نقطه  $P$  و  $Q$ ، شیب این خط برابر  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  خواهد بود. اگر مقدار  $\Delta x$  کوچک و کوچکتر انتخاب شود آنگاه نقطه  $Q$  بر روی منحنی به نقطه  $P$  نزدیک و نزدیکتر شده، خطوط قاطع گذرنده از  $P$  و  $Q$  به خط مماس بر  $C$  در نقطه  $P$  میل می‌کنند. به این ترتیب طبیعی است که شیب خط مماس را برابر عبارت  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  فرض کنیم.

بحث دوم مربوط به فیزیک مقدماتی شده، مفهوم سرعت لحظه‌ای یک متحرک را بیان می‌کند. فرض کنیم متحرکی بر روی یک مسیر مستقیم و با قانون  $d = d(t)$  در حال حرکت باشد. منظور از قانون حرکت فوق این است که در لحظه  $t$  فاصله متحرک تا مبدا حرکت برابر  $d(t)$  است. به این ترتیب در بازه زمانی  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  (با فرض اینکه  $\Delta t > 0$ ) متحرک مسافت  $d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)$  را طی کرده است. عبارت  $\frac{d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)}{\Delta t}$  در فیزیک تحت نام سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  نامیده می‌شود. روشن است که هرچه  $\Delta t$  کوچکتر انتخاب شود نسبت به دست آمده اطلاعات دقیق‌تری در مورد رفتار متحرک در بازه زمانی فوق به دست می‌دهد. بر این مبنا، اگر  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d(t_0 + \Delta t) - d(t_0)}{\Delta t}$  وجود داشته باشد آن را سرعت لحظه‌ای متحرک در زمان  $t = t_0$  می‌نامیم.

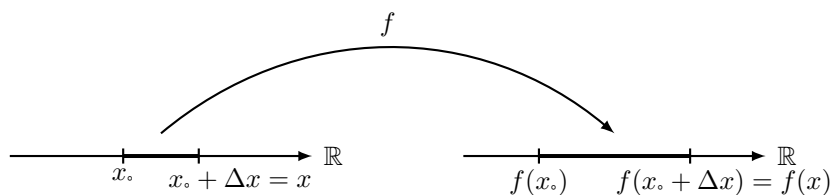
ساختارهایی مانند آنچه در دو مثال فوق ظاهر شده است در بسیاری از زمینه‌های دیگر نیز با تعابیر خاص آن زمینه مشاهده می‌شود. بنابر این بهتر است که این ساختار را به صورتی ریاضی و مستقل از تعبیر خاص آن تعریف کنیم.

### تعریف

فرض کنیم تابع  $f$  در یک همسایگی از نقطه  $x_0$  تعریف شده باشد. در این صورت با انتخاب نمو  $\Delta x$  با این خاصیت که  $x_0 + \Delta x$  در دامنه تعریف  $f$  قرار بگیرد، عبارت  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  به نام تغییرات نسبی  $f$  بر بازه  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ ، در حالتی که  $\Delta x > 0$ ، یا بر بازه  $[x_0 + \Delta x, x_0]$ ، در حالتی که  $\Delta x < 0$ ، نامیده می‌شود. اگر  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$  وجود داشته باشد آنگاه آن را سرعت تغییرات تابع  $f$  در نقطه  $x_0$ ، یا اصطلاحاً مشتق  $f$  در  $a$ ، نامیده و با نماد  $f'(x_0)$  یا  $\frac{df}{dx}(x_0)$  نشان می‌دهیم و در این صورت  $f$  را در  $x_0$  مشتق‌پذیر می‌نامیم.

برای نمو  $\Delta x$ ، اگر قرار دهیم  $x := x_0 + \Delta x$  آنگاه  $\Delta x = x - x_0$  و روشن است که  $\Delta x \rightarrow 0$  اگر و تنها اگر  $x \rightarrow x_0$ . بنابر این در صورت مشتق‌پذیری  $f$  در  $x_0$ ، خواهیم داشت

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



مثال. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{الف})$$

در نقطه  $x_0 = 0$

برای  $x \neq 0$ ،

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x}) - 0}{x} = x \sin(\frac{1}{x})$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

پس این تابع در نقطه  $x_0 = 0$  مشتق‌پذیر بوده،  $f'(0) = 0$ .

ب)  $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$  در نقطه  $x_0 = 1$

داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x} - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x-1)^2}} = \infty \end{aligned}$$

در نتیجه این تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

تا اینجا مفهوم مشتق‌پذیری در یک نقطه را تعریف کردیم. با استفاده از این تعریف، اکنون می‌توانیم مشتق‌پذیری بر یک بازه را تعریف کنیم. فرض کنیم  $I \subseteq \mathbb{R}$  بازه‌ای باز از اعداد حقیقی باشد. تابع  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  را بر این بازه مشتق‌پذیر نامیم هرگاه  $f$  در هر نقطه از  $I$  مشتق‌پذیر باشد. در این حالت تابع جدیدی با دستور  $x \mapsto f'(x)$  بر  $I$  قابل تعریف خواهد بود. این تابع را تابع مشتق  $f$  نامیده آن را با نماد  $f'$  نشان می‌دهیم.

مثال. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر  $\mathbb{R}$  بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را در هر مورد تعیین کنید.

الف)  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

فرض کنیم  $x_0 \in \mathbb{R}$  نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1} \end{aligned}$$

در نتیجه  $f$  در نقطه دلخواه  $x_0$  مشتق‌پذیر است و  $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$ . به این ترتیب  $f$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر بوده، تابع مشتق دارای

ضابطه  $f'(x) = nx^{n-1}$  خواهد بود.

ب)  $f(x) = \sin x$

مانند مثال قبل، برای نقطه‌ای چون  $x_0 \in \mathbb{R}$ ، ابتدا توجه می‌کنیم

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = \cos x_0.\end{aligned}$$

در نتیجه تابع فوق در نقطه  $x_0$  مشتق‌پذیر است و  $f'(x_0) = \cos x_0$ . با توجه به دلخواه بودن  $x_0 \in \mathbb{R}$ ، تابع  $\sin$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و تابع مشتق تابعی با دستور  $f'(x) = \cos x$  است.

ج)  $f(x) = |x|$

می‌توانیم این تابع را به صورت  $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$  بیان کنیم. اکنون برای  $x_0 \in \mathbb{R}$ ، با توجه به نحوه تعریف تابع  $f$ ، سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

۱- اگر  $x_0 > 0$  آنگاه برای  $x$  به اندازه کافی نزدیک این نقطه،  $x$  نیز مثبت بوده در نتیجه  $f(x) = x$ . به این ترتیب

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

پس  $f$  در این نقطه مشتق‌پذیر است و  $f'(x_0) = 1$ .

۲- به همین ترتیب اگر  $x_0 < 0$  آنگاه برای مقادیر  $x$  نزدیک  $x_0$ ،  $x$  نیز منفی بوده در نتیجه  $f(x) = -x$  و از آنجا  $f'(x_0) = -1$ .

۳- در حالتی که  $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

و می‌دانیم که این حد وجود ندارد. بنابراین تابع فوق در  $x_0 = 0$  مشتق‌پذیر نیست.

بر اساس سه بررسی فوق، تابع  $f$  با دستور  $f(x) = |x|$  بر  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  مشتق‌پذیر بوده، تابع مشتق تابعی با ضابطه زیر است.

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} = \frac{|x|}{x}$$

به عنوان تمرین نشان دهید تابع  $f$  با دستور  $f(x) = \cos x$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و  $f'(x) = -\sin x$ .

یکی از خاصیت‌های مهم توابع مشتق‌پذیر پیوستگی این توابع است که در قضیه زیر بیان شده است.

## قضیه.

اگر تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  مشتق پذیر باشد آنگاه  $f$  در این نقطه پیوسته است.

**اثبات.** طبق فرض  $f$  در یک همسایگی از نقطه  $x_0$  تعریف شده است. برای  $x \neq x_0$  در این همسایگی،

$$f(x) = f(x_0) + (f(x) - f(x_0)) = f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

در نتیجه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( f(x_0) + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) = f(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) \right) = f(x_0) + f'(x_0) \times 0 = f(x_0)$$

پس  $f$  در  $x_0$  پیوسته است. ■

به این ترتیب، اگر  $f$  در نقطه‌ای ناپیوسته باشد در این نقطه مشتق پذیر نیز نخواهد بود. به طور مثال، به سادگی مشاهده می‌شود تابع  $f(x) = x[x]$  در  $x = 1$  ناپیوسته است. در نتیجه این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست. باید توجه داشت پیوستگی شرط لازم برای مشتق پذیری است ولی این شرط کافی نیست. به این معنی که صرف پیوستگی تابع در یک نقطه باعث مشتق پذیری تابع در آن نقطه نیست. به طور مثال، قبلاً مشاهده کردیم تابع  $f(x) = |x|$  در نقطه  $x = 0$  پیوسته است ولی  $f$  در این نقطه مشتق پذیر نیست.

برخی از توابع با استفاده از اعمال جبری بر روی توابع با ساختار ساده‌تر به دست می‌آیند. در این موارد، مشتق تابع داده شده را می‌توانیم با استفاده از مشتق توابع ساده‌تری که در ساختار آن شرکت کرده‌اند به دست آوریم.

## قضیه

فرض کنیم توابع  $f$  و  $g$  در نقطه  $x_0$  مشتق پذیر باشند. در این صورت هر یک از توابع  $\lambda f$ ،  $f \pm g$ ،  $\lambda \in \mathbb{R}$  ثابت و  $fg$  نیز در  $x_0$  مشتق پذیر بوده، داریم

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \quad , \quad (\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

به علاوه اگر  $g(x_0) \neq 0$  آنگاه تابع  $\frac{f}{g}$  نیز در  $x_0$  مشتق پذیر است و  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

**اثبات.** اثبات بسیار ساده با استفاده از تعریف مشتق و استفاده از فرض مشتق پذیری توابع  $f$  و  $g$  به دست می‌آید. در اینجا فقط مشتق پذیری تابع  $\frac{f}{g}$  را

بررسی می‌کنیم. با توجه به اینکه

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x - x_0} \left( \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{g(x)g(x_0)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0) - f(x_0)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) - f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= \frac{1}{(g(x_0))^2} (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \end{aligned}$$

■

### نتیجه

با توجه به مشتق‌پذیری هر یک از توابع  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = x^2$ ,  $\dots$ ,  $f_n(x) = x^n$  در هر نقطه از  $\mathbb{R}$  و مشتق‌پذیری تابع ثابت، با استفاده مکرر از قضیه فوق، هر تابع چندجمله‌ای مانند  $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  در هر نقطه از  $\mathbb{R}$  مشتق‌پذیر است و

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + 2 a_2 x + a_1$$

مثال. مشتق‌پذیری تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^3 + 1} & x \geq 0 \\ x \cos x & x < 0 \end{cases}$  را بر  $\mathbb{R}$  بررسی کنید.

فرض کنیم  $x_0 \in \mathbb{R}$  نقطه‌ای دلخواه باشد. با توجه به نحوه تعریف  $f$ ، سه حالت زیر را برای  $x_0$  در نظر می‌گیریم.

(الف)  $x_0 > 0$ . در این صورت یک همسایگی از  $x_0$  چون  $(x_0 - r, x_0 + r)$  وجود دارد که تمام نقاط آن در بازه  $(0, \infty)$  قرار گیرد و به این ترتیب تابع  $f$  همه جا بر این همسایگی توسط ضابطه  $f(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$  داده می‌شود. با توجه به مشتق‌پذیری چندجمله‌ای‌های  $p(x) = x$  و  $q(x) = x^3 + 1$  و این که، با توجه به فرض  $x_0 > 0$ ،  $q(x_0) = x_0^3 + 1 \neq 0$ ، بنابر قضیه قبل،  $f$  در این نقطه مشتق‌پذیر است و

$$f'(x_0) = \frac{p'(x_0)q(x_0) - p(x_0)q'(x_0)}{q^2(x_0)} = \frac{x_0^3 + 1 - x_0(3x_0^2)}{(x_0^3 + 1)^2} = \frac{1 - 2x_0^3}{(1 + x_0^3)^2}$$

(ب)  $x_0 < 0$ . به همین ترتیب در یک همسایگی از نقطه  $x_0$ ،  $f$  توسط ضابطه  $f(x) = x \cos x$  داده شده که حاصل ضرب دو تابع مشتق‌پذیر است. پس مجدداً بنابر قضیه قبل،  $f$  در این نقطه مشتق‌پذیر است و

$$f'(x_0) = \cos x_0 + x_0(-\sin x_0) = \cos x_0 - x_0 \sin x_0.$$

(ج)  $x_0 = 0$ . در این حالت لازم است وجود حد  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$  را بررسی کنیم. با توجه اینکه ضابطه  $f$  سمت راست و سمت چپ نقطه  $x_0 = 0$  متفاوت است، حد راست و حد چپ عبارت فوق را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{1+x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+x^3} = 1 \end{aligned}$$

در نتیجه  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  پس  $f$  در  $x_0 = 0$  نیز مشتق‌پذیر است. با توجه به محاسبات فوق، ضابطه تابع مشتق به صورت زیر است.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2x^3}{(1 + x^3)^2} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \cos x - x \sin x & x < 0 \end{cases}$$

همانطور که می‌دانیم یکی از روش‌های متداول برای ساختن توابع جدید استفاده از ترکیب توابع است. قضیه زیر بررسی مشتق تابع مرکب را بر اساس مشتق توابع شرکت‌کننده در ترکیب امکان‌پذیر می‌سازد.

#### قضیه

فرض کنیم  $f$  تابعی مشتق‌پذیر در  $x_0$  و  $g$  تابعی مشتق‌پذیر در  $y_0 = f(x_0)$  باشد. در این صورت تابع  $g \circ f$  در نقطه  $x_0$  مشتق‌پذیر است و  $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$ .

اثبات این قضیه نیازمند کمی دقت ریاضی بوده، جهت جلوگیری از طولانی شدن بحث، از ارائه آن در اینجا صرف‌نظر می‌شود.

مثال. الف) فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ . نشان دهید تابع  $f$  با دستور  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  بر  $(0, \infty)$  مشتق‌پذیر بوده، ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

ب) اگر  $r \in \mathbb{Q}$  یک عدد گویای مثبت باشد، نشان دهید تابع  $f(x) = x^r$  بر  $(0, \infty)$  مشتق‌پذیر است و تابع مشتق را به دست آورید.

الف) توجه می‌کنیم که برای مشتق‌پذیری تابع  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  قضایایی که تاکنون بیان کرده‌ایم قابل استفاده نیستند. بنابراین مشتق‌پذیری این تابع را با استفاده از تعریف بررسی می‌کنیم. فرض کنیم  $x_0 \in (0, \infty)$  نقطه‌ای دلخواه باشد. در این صورت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0}$$

برای محاسبه حد فوق اتحاد زیر را مود توجه قرار می‌دهیم. برای هر دو عدد حقیقی  $\alpha$  و  $\beta$ ، و برای هر عدد طبیعی  $n \in \mathbb{N}$

$$\alpha^n - \beta^n = (\alpha - \beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1})$$

اکنون در این اتحاد اگر به جای  $\alpha$  عبارت  $x^{\frac{1}{n}}$  و به جای  $\beta$ ،  $x_0^{\frac{1}{n}}$  را قرار دهیم، خواهیم داشت

$$(x^{\frac{1}{n}})^n - (x_0^{\frac{1}{n}})^n = (x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})$$

و از آنجا

$$\frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} = \frac{1}{(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}}x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{1}{n}}x_0^{\frac{n-2}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}})} \\ &= \frac{1}{x_0^{\frac{n-1}{n}} + x_0^{\frac{n-1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

ب) برای عدد گویای مثبت  $r \in \mathbb{Q}$  اعداد طبیعی  $m, n \in \mathbb{N}$  وجود دارند که  $r = \frac{m}{n}$ . اکنون اگر قرار دهیم  $h(x) = x^{\frac{1}{n}}$  و  $p(x) = x^m$  آنگاه

$$f(x) = x^r = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = p(h(x))$$

با توجه به قسمت قبل، تابع  $h(x)$  مشتق‌پذیر بوده، چندجمله‌ای  $p(x)$  نیز مشتق‌پذیر است. بنابراین قضیه مشتق تابع مرکب، تابع  $f(x)$  مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} f'(x) &= p'(h(x))h'(x) \\ &= m(h(x))^{m-1} \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n}} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = r x^{r-1}$$

به عبارت دیگر در این حالت نیز مشتق تابع  $f(x) = x^r$  از همان قانون مشتق تابع چندجمله‌ای  $q(x) = x^n$  پیروی می‌کند. در حالتی که  $r \in \mathbb{Q}$  یک عدد گویای منفی باشد با قرار دادن  $s = -r$  و توجه به اینکه  $x^r = \frac{1}{x^s}$ ، از بحث فوق استفاده کرده، نشان دهید مشتق تابع  $f(x) = x^r$  مجدداً از همان قانون فوق پیروی می‌کند.

مثال. مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x) = \sin\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \quad \text{ب) } f(x) = \tan(x^2) \quad \text{ج) } f(x) = \sqrt[3]{x^4 + x}$$

الف) با توجه به قضیه قبل،

$$f'(x) = \sin'\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \left(\frac{(1+x^2) - x(2x)}{(1+x^2)^2}\right) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \cos\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

ب) مانند قسمت الف)،

$$f'(x) = \tan'(x^2)(x^2)' = 2x(1 + \tan^2(x^2))$$

ج) اگر قرار دهیم  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  و  $p(x) = x^4 + x$  آنگاه  $f(x) = g(p(x))$ . در نتیجه

$$f'(x) = g'(p(x))p'(x) = \frac{1}{3}(p(x))^{-\frac{2}{3}}p'(x) = \frac{1}{3}(x^4 + x)^{-\frac{2}{3}}(4x^3 + 1)$$

تمرین. مشتق‌پذیری تابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2 + x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  را بر  $\mathbb{R}$  بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

مشتقات مراتب بالاتر. فرض کنیم  $f$  بر بازه  $I \subseteq \mathbb{R}$  مشتق‌پذیر باشد. قبلاً اشاره کردیم در این حالت تابع جدیدی به نام تابع مشتق با نماد  $f'$  بر  $I$  تعریف شده است. اگر تابع اخیر در نقطه‌ای چون  $x_0 \in I$  مشتق‌پذیر باشد آنگاه  $(f')'(x_0)$  را مشتق دوم  $f$  در  $x_0$  نامیده آن را با نماد  $f''(x_0)$  نشان می‌دهیم. مشتقات مراتب بالاتر به نحو مشابه تعریف می‌شوند.

مثال. مشتق مرتبه دوم تابع  $f$  با دستور  $f(x) = \sin(\sqrt{x})$  را تعیین کنید.

با استفاده از فرمول مشتق تابع مرکب

$$f'(x) = \cos(\sqrt{x}) \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} f''(x) = (f'(x))' &= \frac{-\sin(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\sqrt{x} - \cos(\sqrt{x}) \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{-\sin(\sqrt{x}) - \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}}{4x} \end{aligned}$$

تمرین‌های فصل دوم.

۱. در مورد هر یک از توابع زیر بزرگترین دامنه‌ای را تعیین کنید که تابع داده شده بر آن مشتق‌پذیر باشد. سپس ضابطه تابع مشتق را بر این بازه تعیین کنید.

الف)  $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 6}{x}$

ب)  $f(x) = x^{\frac{5}{6}} - x^{\frac{2}{3}}$

ج)  $f(x) = (x + x^{-1})^2$

د)  $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})^2$

ه)  $g(x) = x|x|$

و)  $h(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$

ز)  $f(x) = \sin(\sqrt{1+x})$

ح)  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

ط)  $f(x) = \sqrt{x - \sqrt{x}}$

ی)  $f(t) = \sqrt[3]{t}(t^2 + t^{-1})$

۲. مشتق‌پذیری هر یک از توابع زیر را بر  $\mathbb{R}$  بررسی کرده، ضابطه تابع مشتق را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } f(x) &= \begin{cases} \sin^2 x & x > 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases} & \text{ب) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x}{1+x^2} & x \geq 0 \\ x^3 - x & x < 0 \end{cases} & \text{ج) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

۳. نشان دهید تابع  $f$  با دستور  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  بر  $\mathbb{R}$  تابعی مشتق‌پذیر است. ضابطه تابع مشتق را به

دست آورید. نشان دهید تابع مشتق در  $x = 0$  پیوسته نیست.

$$۴. \text{ فرض کنید } f \text{ تابعی با دستور } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{x+1}{x}\right) & x > 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

باشد. نشان دهید تابع  $f$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است و ضابطه تابع مشتق را به دست آورید. آیا مشتق دوم  $f$  در  $x = 0$  وجود دارد؟

۵. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  در رابطه  $f(x+y) = f(x)f(y)$  صدق نماید.

الف) نشان دهید  $f(0) = 1$ .

ب) اگر  $f$  در  $x = 0$  مشتق پذیر باشد نشان دهید  $f$  بر  $\mathbb{R}$  مشتق پذیر است.

۶. فرض کنید  $f$  تابعی مشتق پذیر در  $x = a$  باشد. نشان دهید

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

۷. مشتق اول و دوم تابع  $g$  با ضابطه  $g(x) = \sqrt{\sin x} + \sin(\sqrt{x})$  را به دست آورید.

۸. فرض کنید  $f(1) = f'(1) = 1$ ,  $g(1) = 2$  و  $g'(1) = 0$ . مشتق هریک از توابع زیر را در نقطه  $x = 1$  به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \text{الف)} & h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} & \text{ب)} & h(x) = \frac{g(x)}{1+f(x)} & \text{ج)} & h(t) = \frac{t}{f(t)+g(t)} \end{array}$$

۹. نشان دهید مشتق تابعی زوج، تابعی فرد و مشتق تابعی فرد، تابعی زوج است.

$$۱۰. \text{ تابع } f \text{ با دستور } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ ax + b & x > 2 \end{cases}$$
 مفروض است. مقادیر  $a$  و  $b$  را به گونه ای تعیین کنید که  $f$  همه جا مشتق پذیر باشد. ضابطه تابع مشتق را تعیین کنید.

۱۱. هریک از حدود زیر را با معرفی توابعی مناسب و استفاده از مشتق این توابع، محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{ب)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{\sin 5x} \\ \text{ج)} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2 + x - 2} & \text{د)} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} \\ \text{ه)} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} & \text{و)} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x^2 - 4)}{x - 2} \end{array}$$

۱۲. اگر  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  و  $F(x) = f(xf(x))$ , مطلوب است تعیین مقدار  $F'(0)$ .

۱۳. فرض کنید  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی پیوسته بر  $\mathbb{R}$  و مشتق‌پذیر در  $x = 0$  با  $f(0) = 0$  و  $f'(0) = 1$  باشد. اگر تابع  $g$  با

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(\sin x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad \text{دستور}$$

تعریف شده باشد نشان دهید  $g$  بر  $\mathbb{R}$  تابعی پیوسته است.

۱۴. کدامیک از گزاره‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟ در هر مورد نظر خود را توضیح دهید.

$$\text{الف) اگر } f(x) = \begin{cases} x + \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad f'(0) = 0$$

$$\text{ب) } \frac{d}{dx} |x^2 + x| = |2x + 1|$$

$$\text{ج) } \frac{d}{dx} (\tan^2 x) = \frac{d}{dx} (\sec^2 x)$$

د) اگر  $f$  در نقطه  $a$  مشتق‌پذیر باشد آنگاه  $f$  در یک همسایگی این نقطه پیوسته است.

۱۵. فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع مشتق‌پذیر باشند و  $f(g(x)) = x$ . اگر  $f'(x) = 1 + (f(x))^2$  نشان دهید  $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

۱۶. فرض کنید  $f$  تابعی مشتق‌پذیر در نقطه  $a \in (0, \infty)$  باشد. مقدار حد زیر را بر حسب  $f'(a)$  به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

۱۷. اگر سهمی  $y = x^2 + C$  بر خط  $y = x$  مماس باشد مقدار ثابت  $C$  را پیدا کنید.

۱۸. نقاطی از خم به معادله  $y = \sin(x - \sin x)$  را تعیین کنید که در آن نقاط خم بر محور  $x$  مماس باشد.