به نام خدا

دانشکده علوم ریاضی

مجموعه تمرین‌هایی در درس ریاضی عمومی ۲

(ویرایش بهمن ۹۸)

فصل اول. توابع چندمتغیره

---

۱. تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=\ln(xyz)$ مفروض است. دامنه تعریف f را تعیین کرده، مقدار این تابع را در نقاط $P=(۱,۱,e)$ و $Q=(-\sqrt{e},-\sqrt(e),۱)$ به دست آورید.

۲. در صورتی که برای تابع دو متغیره‌ی f رابطه‌ی $f(x+y,x-y)=۲xy+y^۲$ برقرار باشد، ضابطه‌ی f را پیدا کنید.

۳. دامنه تعریف هر یک از توابع چند متغیره‌ی زیر را مشخص کنید.

الف) $f(x,y)=\sqrt{۱+۲x^۲+۳y^۲}$. ب) $f(x,y)=\dfrac{۱}{\sqrt{۴-x^۲-y^۲}}$.

ج) $f(x,y)=\ln xy$. د) $f(x,y,z)=\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}+\dfrac{۱}{z}$.

۴. نمودار تابع دو متغیره‌ی $f(x,y)=\sqrt{x^۲+y^۲+۱}$ را توصیف کنید.

۵. برای تابع f باضابطه‌ی $f(x,y)=x^۲+۴y^۲$ منحنی تراز $f(x,y)=c$ را به ازای $c=۰,۱,۲,۳,۴$ رسم کنید.

۶. رویه‌ی تراز $f(x,y,z)=c$ را، که در آن $f(x,y,z)=x^۲+۲y^۲+۳z^۲$ و $۰\leq c<\infty$، توصیف کنید.

۷. نمودار معادلات زیر را در فضای سه بعدی توصیف و رسم نمایید.

الف) $x^۲-y^۲=۰$

ب) $x^۲+z^۲=۲z$

ج) $xy=-۱$

د) $y^۲-۸x=۰$

ه) $x^۲-y^۲+z^۲=۰$

و) $y^۲+z^۲-x=۰$

ز) $y^۲+۴x^۲+z-۳=۰$

۸. مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $x=۴z^۲$ حول محور zها.

۹. مطلوب است معادله‌ی رویه‌ی حاصل از دوران منحنی $y=\sqrt{z}$ حول محور yها.

۱۰. معادله‌ی رویه‌ی دوار حاصل از دوران بیضی به معادله‌ی $9x^2 + 4z^2 = 36$ حول محور xها را بدست آورید.

۱۱. مطلوب است رسم نمودار $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

۱۲. رویه‌ی S از دوران هذلولی $x^2 - z^2 = 4$ حول محور z حاصل می‌شود.

الف) معادله‌ی رویه‌ی S را بدست آورید.

ب) نشان دهید که از نقطه‌ی $M = (2, 0, 0)$ واقع بر رویه‌ی S دقیقا دو خط راست می‌گذرند که کاملا بر رویه فوق قرار دارند. معادله‌ی این خطوط را بدست آورید.

۱۳. نشان دهید از نقطه‌ی $M = (0, 1, -1)$ واقع بر رویه‌ی S به معادله‌ی $z = x^2 - y^2$ می‌توان صفحه‌ای گذراند که رویه‌ی S را در دو خط قطع کند. معادله‌ی این صفحه را بنویسید.

۱۴. رویه‌ی به معادله $x^2 - y^2 = z$ مفروض است. نوع رویه را مشخص کرده و آن‌را رسم کنید. ثابت کنید که از مبدا مختصات تنها دو خط می‌گذرد که بر رویه‌ی فوق قرار دارند.

۱۵. نشان دهید مقطع صفحه‌ی $x = 1$ با هذلولی‌گون دو پارچه‌ی دوار $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ یک هذلولی است. معادلات پارامتری خط مماس بر این هذلولی را در نقطه‌ی $P = (1, 1, \sqrt{3})$ بنویسید.

۱۶. با استفاده از تعریف نشان دهید $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \cos(xy)\sin(y)}{x^2 + y^2} = 0$.

۱۷. (الف) نشان دهید که نقطه‌ی $(0, 0)$ یک نقطه‌ی انباشتگی خم $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ است.(یعنی هر همسایگی به مرکز $(0, 0)$ با این خم نقطه‌ی مشترک دیگری غیر از $(0, 0)$ دارد).

(ب) نشان دهید تابع $f(x, y) = \begin{cases} \frac{ye^{-\frac{1}{x^2}}}{y^2+e^{-\frac{2}{x^2}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $(0, 0)$ پیوسته نیست.

۱۸. نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2}$ در مبدأ دارای حد نیست ولی مقدار آن بر روی هر خطی که از مبدا می‌گذرد به مقدار یکسانی میل می‌کند.

۱۹. تابع f با ضابطه‌ی $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ مفروض است. کلیه نقاطی که f در آن‌ها پیوسته است را تعیین کنید.

۲۰. نشان دهید تابع $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ در $(0, 0)$ دارای حد نیست.

۲۱. نشان دهید تابع زیر در مبدأ پیوسته نیست.

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x-y}{(x+y)^۳} & x+y\neq ۰ \\ ۰ & x+y=۰ \end{cases}$$

۲۲. با استفاده از تعریف، پیوستگی تابع دو متغیره‌ی زیر را در نقطه‌ی $(۰,۰)$ بررسی نمایید. (r یک عدد ثابت گویا است)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|y|^r x^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$$

۲۳. پیوستگی تابع f با دستور

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy+y}{x^۲+y^۲+۲x+۱} & (x,y)\neq(-۱,۰) \\ ۰ & (x,y)=(-۱,۰) \end{cases}$$

را در نقطه‌ی $(-۱,۰)$ بررسی کنید.

۲۴. برای تابع $f(x,y)=\dfrac{x^۲y^۲}{x^۲y^۲+(x-y)^۲}$ نشان دهید $\lim\limits_{x\to ۰}(\lim\limits_{y\to ۰} f(x,y))=\lim\limits_{y\to ۰}(\lim\limits_{x\to ۰} f(x,y))=۰$. با این وجود $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود ندارد.

۲۵. برای تابع $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{۱}{x}\sin\dfrac{۱}{y}$ نشان دهید حدود مکرر $\lim\limits_{x\to ۰}(\lim\limits_{y\to ۰} f(x,y))$ و $\lim\limits_{y\to ۰}(\lim\limits_{x\to ۰} f(x,y))$ وجود ندارد اما $\lim\limits_{(x,y)\to(۰,۰)} f(x,y)$ وجود دارد.

۲۶. تمام مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر را محاسبه کنید.

(الف) $f(x,y)=\ln x+\sqrt{x^۲+y^۲}$

(ب) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}-\dfrac{z}{x}$

(ج) $f(x,y,z)=x^{yz}$

۲۷. تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} (xy)\dfrac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y)=(۰,۰) \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید $\dfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۰,۰)\neq\dfrac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(۰,۰)$.

۲۸. می‌دانیم که اگر برای تابع f مشتق‌های جزئی f_{xy} و f_{yx} پیوسته باشند آنگاه $f_{xy}=f_{yx}$. این مطلب را با محاسبه مستقیم مشتق‌های جزئی f_{xy}وf_{yx} برای تابع $f(x,y,z)=e^{xyz}$ تحقیق کنید.

۲۹. برای $w=\dfrac{x}{y+x}$ مشتق جزئی مرتبه‌ی چهارم $\dfrac{\partial^۴ w}{\partial^۲ z\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۳۰. نشان دهید توابع $u(x,y)=e^x\cos y$ و $v(x,y)=e^x\sin y$ در روابط زیر صدق می‌کنند.

الف) $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ ب) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$

ج) $u_{xx}+u_{yy}=0$ د) $v_{xx}+v_{yy}=0$

معادلات (الف) و (ب) را معادلات کوشی - ریمان می‌نامند که در نظریه‌ی توابع مختلط از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در ضمن هر یک از معادلات (ج) و (د) یک معادله‌ی لاپلاس در فضای دو بعدی نامیده می‌شود.

۳۱. معادله‌ی $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$، که در آن u یک تابع سه متغیره‌ی است یک معادله‌ی لاپلاس در فضای سه بعدی نامیده می‌شود. نشان دهید تابع u با ضابطه‌ی $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ که در آن $(x,y,z)\neq(0,0,0)$، در این معادله صدق می‌کند.

۳۲. تابع دو متغیره‌ی f روی $D\subseteq\mathbb{R}^2$ همگن از درجه‌ی n $(n\in\mathbb{N})$ نامیده می‌شود اگر به ازای تمام $(x,y)\in D$ و تمام اعداد حقیقی و مثبت t داشته باشیم $f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ (فرض بر آن است که $(tx,ty)\in D$). اگر این تابع مشتق‌پذیر باشد نشان دهید برای هر $(x,y)\in D$،

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y)$$

۳۳. نشان دهید اگر یک تابع دو متغیره‌ی f، همگن درجه‌ی n باشد آنگاه توابع مشتقات جزیی آن، یعنی f_x و f_y، همگن از درجه‌ی $n-1$ می‌باشند.

۳۴. تابع $f(x,y)=\begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ مفروض است. (الف) نشان دهید f در $(0,0)$ پیوسته است و مشتقات جزیی $\frac{\partial f}{\partial x}$، $\frac{\partial f}{\partial y}$ را در این نقطه به دست آورید. (ب) نشان دهید که f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۵. (الف) فرض کنید توابع f و g توابعی یک متغیره هستند که روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ حداقل دو بار مشتق‌پذیرند. اگر $c\in\mathbb{R}$ و $c\neq 0$، نشان دهید تابع u با تعریف $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$ یک جواب برای معادله‌ی زیر (معادله‌ی موج) می‌باشد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

(ب) تحقیق کنید که هر یک از توابع زیر جوابی برای معادله‌ی موج هستند.

(۱) $u(x,t)=x^2+c^2t^2$ (۲) $u(x,t)=\sin x\sin ct$ (۳) $u(x,t)=e^x\cosh ct$

۳۶. برای تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=2xy-3xz+yz$، نمو تابع یعنی

$$\Delta f=f(a+\Delta x,b+\Delta y,c+\Delta z)-f(a,b,c)$$

را در حالتی که $(a,b,c)=(2,1,4)$، $\Delta x=3$، $\Delta y=-1$ و $\Delta z=2$ محاسبه کنید.

۳۷. دیفرانسیل کل هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

(الف) $f(x,y,z)=x^2y-xy^3+x^3y^2$ (ب) $f(x,y,z)=\dfrac{x+y}{y+z}$

(ج) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=x_1x_2\dots x_n$

۳۸. با استفاده از دیفرانسیل کل، مقدار تقریبی $\sqrt{(1/06)^2+(1/97)^3}$ را به دست آورید.

۳۹. نشان دهید تابع $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۴۰. تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} x & |x|\le |y| \\ -x & |x|>|y| \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید که این تابع در مبدا مختصات پیوسته است و مشتقات جزیی آن در این نقطه وجود دارند اما در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۴۱. نشان دهید که تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در مبدا مشتق‌پذیر است، هر چند که مشتقات جزیی آن در مبدأ پیوسته نیستند.

۴۲. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+y)}{|x|+|y|} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید f در مبدأ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۴۳. نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ در هر نقطه از صفحه دارای مشتقات جزیی است اما در مبدأ ناپیوسته است.

۴۴. نشان دهید تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ در مبدأ پیوسته و دارای مشتقات جزئی است ولی مشتق‌پذیر نیست. توضیح دهید چرا این موضوع تناقضی با قضایای مربوط به مشتق‌پذیری ندارد.

۴۵. ثابت کنید تابع $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ در مبدأ مشتق‌پذیر نیست.

۴۶. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} & (x,y)\neq(0,1) \\ 0 & (x,y)=(0,1) \end{cases}$ مفروض است.

الف) ثابت کنید f در نقطه‌ی $(0,1)$ پیوسته است.

ب) مقادیر f_x و f_y را در نقطه‌ی $(0,1)$ به دست آورید.

ج) آیا f در نقطه‌ی $(0,1)$ مشتق‌پذیر است؟(توضیح دهید)

۴۷. فرض کنید $f(x,y)=3xy^2-5x-2xy$ و $\Delta x=2$ و $\Delta y=-1$. مطلوب است نمو تابع f در نقطه‌ی $(-1,3)$ و دیفرانسیل کل تابع در همان نقطه.

۴۸. ثابت کنید تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ همه جا مشتق‌پذیر است.

۴۹. دیفرانسیل کل تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$ را محاسبه کنید.

۵۰. اگر تابع دو متغیره‌ی f همگن از درجه‌ی n با مشتقات جزئی مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد، نشان دهید

$$x^2 f_{xx}(x,y)+2xyf_{xy}(x,y)+y^2 f_{yy}(x,y)=n(n-1)f(x,y)$$

۵۱. اگر توابع f و g حداقل دو مرتبه مشتق‌پذیر باشند و تابع u به صورت $u(x,y)=\dfrac{1}{x}(f(x+y)+g(x-y))$ تعریف شده باشد، نشان دهید

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2\frac{\partial u}{\partial x})=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

۵۲. اگر تابع z، به عنوان تابعی از x و y، به طور ضمنی توسط رابطه‌ی $\sin(x+y)+\sin(y+z)=1$ تعریف شده باشد، عبارت $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید.

۵۳. فرض کنید $u=xyz$. نشان دهید اگر u و z توابعی از متغیرهای مستقل x و y در نظر گرفته شوند، آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=xy(\frac{\partial z}{\partial x})+yz$$

حال آن که اگر x، y و z متغیرهای مستقل در نظر گرفته شوند آنگاه

$$\frac{\partial u}{\partial x}=yz$$

۵۴. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و z به عنوان تابعی بر حسب x و y به صورت $z=f(\dfrac{x+y}{y})$ تعریف شده باشد. ثابت کنید

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

۵۵. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z=\frac{y}{f(x^2+y^2)}$، ثابت کنید

$$-\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$$

۵۶. فرض کنید f تابعی سه متغیره باشد به طوری که $f(x-y+z,x+y+z,x-y-z)=3x-y+z$.
الف) مطلوب است تعیین $f(x,y,z)$.
ب) اگر $g(x,y,z)=f(x^2,y^2,z^2)$، مطلوب است تعیین رویه‌های تراز g.
ج) با مفروضات قسمت (ب) ثابت کنید $(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2+(\frac{\partial g}{\partial z})^2=4g(x,y,z)$.

۵۷. فرض کنید $u(x,y)=e^y\cos x$، $x=2t$، $y=t^2$ و $g(t)=u(x(t),y(t))$. تابع $g''(t)$ را با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای به دست آورید.

۵۸. فرض کنید $z=f(x,y)$ تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y باشد، $x=x(r,\theta)=r\cos\theta$ و $y=y(r,\theta)=r\sin\theta$. ثابت کنید $(\frac{\partial z}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial z}{\partial \theta})^2=(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2$. مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ بر حسب $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$.

۵۹. با فرض این که f و g توابعی مشتق‌پذیر باشند، ثابت کنید تابع $w(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$ در معادله‌ی موج، یعنی $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$، صدق می‌کند.

۶۰. فرض کنید f تابعی با مشتقات مرتبه‌ی دوم پیوسته باشد. با فرض این که $z=f(x,y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}$ صدق نماید، نشان دهید $w=w(x,y)=f(x+y,x-y)$ در معادله‌ی $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=1$ صدق می‌کند.

۶۱. با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $z=xy+f(x^2+y^2)$ در معادله‌ی $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2$ صدق می‌کند.

۶۲. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر است و $z=f(x,y)$. اگر $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$ و $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$ (α ثابت)، نشان دهید $(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2=(\frac{\partial z}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2$.

۶۳. ثابت کنید تابع $f(x,t)=\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}e^{-\sigma^2}d\sigma$ در معادله‌ی دیفرانسیل $k\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial t}=0$ صدق می‌کند (k ثابت).

۶۴. با فرض این که f تابعی مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید

الف) $z = f(bx - ay)$ در معادله‌ی $a\frac{\partial z}{\partial x} - b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

ب) $w = f(\frac{xy}{x^2 + y^2})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

ج) $z = f(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ صدق می‌کند.

د) $z = xf(\frac{x}{y})$ در معادله‌ی $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x} = z$ صدق می‌کند.

۶۵. فرض کنید که تابع دو متغیره‌ی f در داخل یک دایره یا مستطیل D مشتق‌پذیر بوده و در هر نقطه‌ی داخل آن بردار گرادیان برابر با صفر باشد. نشان دهید f روی D یک تابع ثابت است.

۶۶. فرض کنید توابع f و g دوبار مشتق‌پذیر باشند. اگر $u = u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$، نشان دهید

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

۶۷. فرض کنید معادله‌ی $xz^2 = \ln(y^2 + z^2)$، تابع z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y بیان می‌کند (تابع ضمنی). مطلوب است تعیین $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه‌ی $(1, 0, 0)$.

۶۸. فرض کنید تابع $z = z(x,y)$ به صورت ضمنی توسط معادله‌ی $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 1$ داده شده است. با فرض این که f مشتق‌پذیر باشد، نشان دهید $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2 - xy$.

۶۹. اگر f یک تابع دو متغیره با مشتقات جزیی پیوسته باشد و

$$f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$
$$f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

نشان دهید نقطه‌ی $P = (x_0, y_0)$ یک نقطه‌ی تنها برای نمودار $f(x,y) = 0$ می‌باشد (یعنی یک همسایگی از P وجود دارد که در آن f تنها در P برابر صفر می‌شود). نشان دهید که مبدا یک نقطه‌ی تنها برای منحنی به معادله‌ی

$$x^3 - y^3 + xy^2 - yx^2 + x^2 + y^2 = 0$$

است.

۷۰. مکان هندسی نقاطی از رویه‌ی $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 2xz + 4yz = 8$ را بیابید که صفحه‌ی مماس در آن نقاط موازی صفحه xy باشد.

۷۱. صفحات مماس در نقطه‌ی $M=(x,y,z)$ به ازای $x>0$، $y>0$ و $z>0$ بر رویه‌ی

$$x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3} \quad (\text{عددی ثابت و مثبت } a)$$

محور ox و oy و oz را به ترتیب در نقاط A، B و C قطع می‌کنند. نشان دهید مقدار عبارت $OA^2+OB^2+OC^2$ ثابت و مستقل از نقطه (x,y,z) است.

۷۲. نشان دهید صفحه‌ی مماس بر رویه‌ی $z=x\sin(\frac{y}{x})$ در هر نقطه، از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۷۳. بیضی‌گون (بیضی‌وار) به معادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ مفروض است. (الف) نقاطی از رویه را مشخص کنید که قائم بر رویه در این نقاط با محورهای مختصات زوایای مساوی بسازد. (ب) در چه نقاطی از رویه‌ی فوق صفحات مماس بر رویه موازی صفحات مختصات است؟(چرا؟)

۷۴. معادلات صفحات مماس بر رویه‌ی $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ را که عمود بر خط $x-1=y=z-3$ هستند، پیدا کنید. ضمنا نقاطی از رویه‌ی فوق را مشخص کنید که صفحات مماس بر رویه در آن نقاط عمود بر محور z باشند.

۷۵. رویه‌ی $x^2+y^2-z^2=1$ مفروض است. (الف) معادله‌ی صفحه‌ی مماس و خط عمود بر رویه را در نقطه‌ی $(1,1,1)$ به دست آورید. (ب) نقطه‌ی برخورد دیگر خط عمود فوق با رویه را به دست آورید. (ج) ثابت کنید صفحه‌ی مماس فوق با این رویه‌ی دقیقا در دو خط راست اشتراک دارد.

۷۶. رویه‌ی $z=x^2+y^2$ و نقاط $A=(1,1,0)$ و $B=(2,2,2)$ خارج از رویه مفروضند. (الف) معادله‌ی خطی را به دست آورید که از نقطه‌ی A گذشته بر رویه‌ی فوق عمود باشد. (ب) معادله‌ی صفحه‌ای شامل A و B را به دست آورید که بر رویه‌ی فوق مماس باشد.

۷۷. نشان دهید بر مخروط $z^2=2x^2+4y^2$ خطی وجود دارد که صفحه‌ی مماس بر مخروط در امتداد آن با صفحه‌ی $12x+14y+11z=25$ موازی است. خط و صفحه‌ی مماس را بدست آورید.

۷۸. مطلوب است معادلات پارامتری منحنی حاصل از برخورد سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ و صفحه‌ی $z=2$. اگر در هر نقطه از این منحنی، خطی عمود بر سطح سهمی‌گون رسم نماییم، مجموعه‌ی این خطوط تشکیل مخروطی در فضا می‌دهند. معادله‌ی مخروط را به دست آورید.

۷۹. نقاطی را بر رویه‌ی $2x^2+y^2-z^2=1$ پیدا کنید که صفحه‌ی مماس بر رویه در این نقاط عمود بر فصل مشترک دو صفحه‌ی $x=y$ و $y=z$ باشند.

۸۰. خط مماس بر خم γ حاصل از برخورد دو رویه‌ی $x^2+y^2+z^2=9$ و $xy+z=0$ را در نقطه‌ی $(2,1,-2)$ بیابید.

۸۱. معادله‌ی خطوطی را بیابید که از مبدأ مختصات گذشته بر رویه‌ی $x^۲ + y^۲ + ۹z^۲ = ۱$ عمود باشند.

۸۲. ثابت کنید صفحات مماس بر رویه‌ی $xyz = a^۳$ ($a > ۰$ ثابت) با صفحات مختصات، چهار وجهی‌هایی با حجم ثابت می‌سازند.

۸۳. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر باشد. نشان دهید کلیه‌ی صفحات مماس بر رویه‌ی $z = yf(\frac{y}{x})$ از مبدأ مختصات عبور می‌کنند.

۸۴. معادله‌ی کلیه‌ی صفحات مماس بر کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۳$ را تعیین کنید که شامل خط $L:$ $\begin{cases} x = t + ۲ \\ y = -۲t \\ z = t + ۱ \end{cases}$ باشد.

۸۵. معادلات صفحه‌ی مماس و خط قائم بر رویه‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده پیدا کنید. (الف) $xyz = a^۳$، P هر نقطه‌ی دلخواه در فضای $\mathbb{R}^۳$ است. (ب) $z = ۲\sin x \cos y$، $P = (\frac{\pi}{۴}, \frac{\pi}{۴}, ۱)$.

۸۶. در کدام نقطه (یا نقاط) از مخروط $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۰$ صفحه‌ی مماس و خط قائم تعریف نشده‌اند؟ توضیح دهید.

۸۷. بیضی‌گون $x^۲ + y^۲ + ۳z^۲ = ۶۶$ دارای دو صفحه‌ی مماس موازی با صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ می‌باشد. معادله‌ی این صفحات را همراه با نقاط تماسشان پیدا کنید.

۸۸. نشان دهید رویه‌های $z = xy - y^۲ + ۸y - ۵$ و $z = e^{۲x+y+۴}$، در نقطه‌ی $P = (-۳, ۲, ۱)$ بر هم مماسند و صفحه‌ی مماس مشترکشان را پیدا کنید.

۸۹. فرض کنید C نمودار $f(x, y) = ۰$ باشد و f دارای مشتقات جزئی پیوسته است که همزمان صفر نمی‌شوند. نشان دهید خط مماس بر این نمودار در نقطه‌ی $P = (x_۰, y_۰)$ دارای معادله‌ای به صورت زیر می‌باشد

$$f_x(x_۰, y_۰)(x - x_۰) + f_y(x_۰, y_۰)(y - y_۰) = ۰$$

۹۰. فرض کنید درجه‌ی حرارت در نقطه‌ی (x, y) از صفحه‌ی xy با رابطه‌ی $T(x, y) = \frac{۴x}{x^۲ + y^۲}$ بیان می‌شود. ثابت کنید در هر نقطه‌ی $(x_۰, y_۰)$ روی دایره‌ی $(x - ۲)^۲ + y^۲ = ۴$، بین همه سوها، در سوی شعاع این دایره ماکزیمم مقدار تغییر درجه حرارت را داریم. این مقدار تغییر چقدر است؟

۹۱. خم C فصل مشترک رویه‌های $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۲$ و $x^۲ + y^۲ + z = ۰$ می‌باشد. معادلات خط مماس بر منحنی C را در نقطه‌ی $(۱, ۰, -۱)$ بیابید.

۹۲. سوهایی را بدست آورید که تابع $f(x,y)=(x+1)^2+(y+1)^2$ در نقطه‌ی $(0,0)$ دارای مشتق سویی برابر با ۲ باشد.

۹۳. برای هر یک از توابع زیر مشتق سویی را در نقطه‌ی P و در جهت بردار $\vec{a}$ پیدا کنید.

الف) $f(x,y)=x^3-2xy+y^2+8$, $P=(-1,4)$, $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}$.

ب) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$, $P=(1,3)$, $\vec{a}=-\vec{i}+\vec{j}$.

ج) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{xy}$, $P=(-1,1,2)$, $\vec{a}=-10\vec{i}+10\vec{j}-5\vec{k}$.

۹۴. اگر $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$، مشتق سویی f را در نقطه‌ی $P=(2,3,-4)$ و در سویی که با جهت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده مساوی می‌سازد پیدا کنید.

۹۵. اگر $f(x,y)=xy$، بردار یکه‌ی $\vec{u}$ را طوری بیابید که $D_{\vec{\mu}}f(3,4)=0$.

۹۶. تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y)=\begin{cases} x\sin(\dfrac{y}{x^2+y^2}) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است. کلیه‌ی سوهایی را به دست آورید که f در آن‌ها در مبدأ مختصات دارای مشتق سویی باشد.

۹۷. تابع $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ مفروض است.

الف) مشتق سویی این تابع را در نقطه‌ی $(0,0)$ و در سوی بردار $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}$ تعیین کنید.

ب) مطوب است تعیین $\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.D_{\vec{v}}f(0,0)$. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۹۸. مشتق سویی توابع زیر را در نقاط داده شده و درجهت‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x,y,z)=\cos(xy)+\sin(yz)$, $P_0=(0,\pi,1)$, $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

ب) $g(x,y,z)=ze^{xy}$, $P_0=(1,0,1)$, $\vec{v}=\vec{j}-2\vec{k}$.

۹۹. تابع $f(x,y)=x^2-2xy^2$ و نقطه‌ی $P_0=(1,-2)$ مفروضند.

الف) از نقطه‌ی P_0 در چه جهتی حرکت نماییم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت افزایش یابد؟

ب) در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت کاهش یابد؟

۱۰۰. رویه‌ی S به معادله‌ی $z=4-x^2-y^2$ و نقطه‌ی $(1,1,2)$ بر آن مفروض است. از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع با بیشترین سرعت کاهش یابد. از این نقطه در چه جهتی بر روی رویه حرکت کنیم تا ارتفاع تغییر ننماید.

۱۰۱. اکسترمم‌های موضعی(نسبی) توابع زیر و نوع آن‌ها را بر ناحیه D داده شده تعیین کنید.

(الف) $f(x,y)=xy(۱-x^۲-y^۲)$ $\qquad D=\mathbb{R}^۲$

(ب) $f(x,y)=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{y}+xy$ $\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲; x>۰,\ y>۰\}$.

۱۰۲. به کمک یک تابع دو متغیره‌ی مناسب و محاسبه‌ی مینیمم مطلق این تابع، فاصله‌ی بین دو خط متنافر $L_۱:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t-۱\end{cases}$ و $L_۲:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=t\end{cases}$ را تعیین نمایید.

۱۰۳. روی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$، نقطه‌ای را تعیین کنید که مجموع مربعات فواصل آن از دو نقطه‌ی $(۲,۰,۰)$ و $(۰,۲,۰)$ مینیمم باشد.

۱۰۴. ابعاد مکعب مستطیلی را در یک هشتم اول فضا ($x\geq ۰, y\geq ۰, z\geq ۰$) بیابید که یک راس آن در مبدا مختصات، راس مقابل این راس روی صفحه‌ی $x+۲y+۳z=۱$ و حجم آن ماکزیمم باشد.

۱۰۵. ماکزیمم تابع $f(x,y,z)=xyz$ را با شرط $x+y+z=c$ ($c>۰$ مقداری ثابت) بیابید و سپس نتیجه بگیرید که اگر x و y و z سه عدد مثبت باشند آنگاه $\sqrt[۳]{xyz}\leq\frac{x+y+z}{۳}$.

۱۰۶. فرض کنید x، y و z اضلاع یک مثلث، p نصف محیط این مثلث و S مساحت این مثلث باشد. به کمک فرمول

$$S^۲=p(p-x)(p-y)(p-z)$$

ثابت کنید بین همه مثلث‌های با محیط ثابت $۲k$، مثلث متساوی‌الاضلاع بیشترین مساحت را دارد.

۱۰۷. نقطه‌ای بر خط $L:\begin{cases}x+y=۱\\y+z=۱\end{cases}$ بیابید که مجموع مربعات فواصل آن از صفحات مختصات کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۰۸. مثلث ABC با اضلاعی به طول‌های a، b و c و مساحت ۴ مفروض است. M نقطه‌ای در درون مثلث است که فاصله‌اش تا اضلاع مثلث به ترتیب x، y و z می‌باشد. الف) تحقیق کنید $ax+by+cz=۸$. ب) x و y و z را طوری تعین کنید که $x^۲+y^۲+z^۲$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۱۰۹. صفحه $\frac{x}{۶a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=۱$ مفروض است. a و b و c ($a,b,c>۰$) را چنان بیابید که در شرط $a^۲+b^۲+c^۲=۱$ صدق کنند و حجم هرم حاصل از برخورد صفحه‌ی فوق با صفحات مختصات ماکزیمم باشد. (حجم هرم $\frac{۱}{۶}$ حجم متساوی‌السطوحی است که روی یال‌های آن ساخته می‌شود.)

۱۱۰. معادله‌ی کره‌ای به مرکز مبدا را بنویسید که استوانه‌ی $xy=۱$ را در دو و تنها دو نقطه قطع کند.

۱۱۱. ماکزیمم مقدار تابع $f(x,y,z)=x+y+z$ را با شرط $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۳a^{۲}$ که در آن $a>۰$، بدست آورید و با استفاده از آن نتیجه بگیرید

$$x+y+z\le\sqrt{۳(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲})}$$

۱۱۲. بیشترین مقدار افزایش تابع $f(x,y,z)=xy^{۲}z^{۳}$ در نقطه‌ی $P=(۲,۱,-۱)$ چقدر است ودر چه سویی اتفاق می‌افتد؟

۱۱۳. برای توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تعیین کنید این نقاط نظیر ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی یا نقطه‌ی زینی هستند.

الف) $f(x,y)=۲x^{۲}+(y-۱)^{۲}$

ب) $f(x,y)=۸x^{۳}+y^{۳}-۱۲xy+۶$

ج) $f(x,y)=(x-۱)\ln xy \quad (xy>۰)$

۱۱۴. فرض کنید تابع f روی $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{۲}: x^{۲}+y^{۲}\le ۴\}$ با ضابطه‌ی $f(x,y)=x^{۲}-y^{۲}$ تعریف شده باشد. مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق f را روی D به دست آورید.

۱۱۵. در ریاضیات پیشرفته ثابت می‌شود که یک تابع سه متغیره‌ی f با مشتقات جزیی مرتبه‌ی دوم پیوسته دارای یک مینیمم موضعی در نقطه‌ی بحرانی $P=(a,b,c)$ است هرگاه سه مقدار A، B و E که توسط عبارات

$$A=f_{xx}\quad,\quad D=det\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{bmatrix}\quad,\quad E=det\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz}\\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{bmatrix}$$

تعریف می‌شوند، در نقطه‌ی P مثبت باشند. همچنین f در P دارای یک ماکزیمم موضعی اکید است هرگاه در نقطه‌ی P داشته باشیم $A<۰\ ,\ D>۰\ ,\ E<۰$. با استفاده از آنچه بیان شد مقادیر ماکزیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+۲z^{۲}+xy-۹x-۳y+۴z+۱۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

۱۱۶. آیا تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xyz$ در مبدأ دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی است؟

۱۱۷. با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را با قید داده شده در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x,y)=x^۲+۸y^۲\ ,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$

ب) $f(x,y,z)=۲x-۳y+z-۱\ ,\ x^۲+y^۲+z^۲=۱۴$

ج) $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲\ ,\ x-۲y+۲z=۶$

د) $f(x,y,z)=x^۲+y^۲+z^۲\ ,\ ۲x^۲+y^۲-z^۲=۲$

ه) $f(x,y,z)=xy+xz\ ,\ x^۲+۲y^۲+۲z^۲=۴$

۱۱۸. با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P=(-۱,۴)$ و خط $۱۲x-۵y+۷۱=۰$ را پیدا کنید.

۱۱۹. با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ نقاطی از بیضی با معادله‌ی $۳x^۲-۲xy+۳y^۲-۲=۰$ را پیدا کنید که فاصله‌ی آن‌ها تا مبدا کمترین یا بیشترین مقدار است.

۱۲۰. با استفاده از روش تکثیر کننده‌های لاگرانژ فاصله‌ی بین نقطه‌ی $P=(۱,۱,۱)$ و صفحه‌ی π به معادله‌ی $۲x+۶y-۹z+۱۲=۰$ را پیدا کنید.

۱۲۱. می‌توان نشان داد که اگر تابع سه متغیره‌ی f دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی در نقطه‌ی $P=(a,b,c)$ با قیدهای $g(a,b,c)=۰$ و $h(a,b,c)=۰$ باشد، و اگر بردارهای گرادیان توابع f، g و h غیر صفر و غیر موازی باشند، آنگاه دو عدد μ و λ وجود دارند که

$$\nabla f(a,b,c)=\lambda\nabla g(a,b,c)+\mu\nabla h(a,b,c)$$

(مقادیر μ و λ تکثیر کننده‌های لاگرانژ نامیده می‌شوند. در اینجا فرض بر آن است که توابع f، g و h دارای مشتقات جزیی پیوسته هستند). با استفاده از توضیحات فوق فاصله‌ی بین مبدأ و فصل مشترک دو صفحه‌ی $x+۲y-z-۵=۰$ و $x-y+z-۳=۰$ را پیدا کرده و پاسخ خود را با حل این مساله به کمک روش‌های دیگر مقایسه نمایید.

۱۲۲. اکسترمم‌های مطلق توابع زیر را روی ناحیه‌های مشخص شده تعیین نمایید.

الف) $f(x,y)=x^۲+xy\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲;x^۲+y^۲\leq ۱\}$

ب) $f(x,y)=۲x-y^۲\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲;۰\leq x,۰\leq y,x+y\leq ۱\}$

ج) $f(x,y)=\sin(\frac{\pi xy}{۲})\ ,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲;۱\leq x\leq ۲,۱\leq y\leq ۲\}$

د) $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^۲}{x^+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}\ ,\ D=\{(x,y)\in R^۲;۱\leq x^۲+y^۲\leq ۴\}$

۱۲۳. درجه‌ی حرارت در نقاط مختلف قرص $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲;x^۲+y^۲\leq ۴\}$ توسط $T(x,y)=x^۲+۲y^۲-x$ داده می‌شود. گرم‌ترین و سردترین نقاط قرص D را تعیین کنید.

۱۲۴. اکسترمم‌های مقید توابع زیر را تحت شرط‌های داده شده تعین نمایید.

(الف) $f(x,y,z)=x+y+z\ ,\ g(x,y,z)=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-۳=۰$

(ب) $f(x,y,z)=xyz\ ,\ g(x,y,z)=۲xy+۳xz+yz=۷۲$

(ج) $f(x,y,z)=xy\ ,\ g(x,y,z)=y^{۲}+z^{۲}-۱$

۱۲۵. نقطه‌ای را بر صفحه‌ی $x+۴y+۳z=۲$ تعیین کنید که تابع $f(x,y,z)=۲x^{۲}+۳y^{۲}+z^{۲}$ در آن دارای کمترین مقدار باشد.

۱۲۶. نزدیکترین نقطه‌ی واقع بر رویه‌ی $xyz=۸$ به مبدا مختصات را تعیین نمایید. ثابت کنید خط واصل از مبدا به این نقطه، بر رویه عمود است.

۱۲۷. در بین مجموعه‌ی مثلث‌ها، مثلثی را تعیین کنید که مجموع سینوس زوایای آن بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱. انتگرال‌های دوگانه زیر را حساب کنید.

الف) $\iint_D (x+۲y)\,dxdy$ که در آن D ناحیه محصور بین سهمی $y=x^۲$ و خط $y=x$ است.

ب) $\iint_D \sin(x+y)\,dA$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $y=x$، $x+y=\frac{\pi}{۲}$ و $x=۰$ است.

ج) $\iint_D |x-y^۲|\,dxdy$ که در آن $D=[۰,۱]\times[۰,۱]$.

۲. مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

الف) $\int_۰^۱\int_۱^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})\;dx\;dy+\int_۱^۴\int_{\sqrt{y}}^۲ \frac{y}{x^۴}\sin(\frac{\pi x}{۲})\;dx\;dy$

ب) $\int_۰^۲\int_۰^{۴-x^۲} \frac{xe^{۲y}}{۴-y}\;dy\;dx$

ج) $\iint_A \sqrt{x^۲+y^۲}\;dxdy$ که در آن $A=\{(x,y)\in R^۲;۱\le x^۲+y^۲\le ۲\}$

د) $\int_۰^۱\int_۰^x \frac{dy\;dx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۲}}}+\int_۰^{\sqrt{۲}}\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} \frac{dydx}{(۱+x^۲+y^۲)^{\frac{۱}{۳}}}$

هـ) $\iint_A (x-y)\sin(x^۲-y^۲)\;dxdy$ که در آن A ناحیه‌ی واقع بین خطوط $x+y=۰\;,\;y-x=۰$، $x+y=۲\;,\;y-x=۱\;,\;-۱$ است.

و) $\iint_A e^{\frac{y}{x+y}}\;dxdy$ که در آن A ناحیه واقع بین خطوط $x+y=۱$، $x=۰$ و $y=۰$ است.

ز) $\iint_G x\;dxdy$ که در آن G ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $x(۱-y)=۱\;,\;x(۱-y)=۲\;,\;xy=۱\;,\;xy=۳$ است.

ح) $\iint_D \frac{dxdy}{(xy)^{\frac{۲}{۳}}}$ که در آن D ناحیه محصور توسط منحنی $x^{۲/۳}+y^{۲/۳}=۱$ است.

۳. مساحت هر یک از نواحی زیر را تعیین نمایید.

الف) مساحت داخل دایره‌ی $x^۲+y^۲=۴$ و سمت راست خط $x=۱$.

ب) مساحت محصور بین منحنی‌های $xy=۱$، $xy=۲$ و خطوط $x=۱$ و $x=۲$.

ج) مساحت محصور توسط منحنی‌های $x=۴-۳y^۲$ و $x=y^۲$.

۴. در انتگرال دوگانه‌ی زیر پس از نمایش ناحیه‌ی انتگرال‌گیری، ترتیب انتگرال‌گیری را عوض کرده و انتگرال دوگانه‌ی حاصل را به دست آورید (فرض بر آن است که تابع f پیوسته است).

$$\int_۸^۲ dy\int_{-\sqrt{۴-y^۲}}^{\sqrt{۴-y^۲}} f(x,y)dx$$

۵. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{4-x^{2}} \frac{xe^{2y}}{4-y}\, dy\, dx$ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ‏ ب) $\int_{0}^{8}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{2} \frac{dy\ dx}{y^{4}+1}$

۶. با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری مجموع زیر را به صورت یک انتگرال دوگانه بنویسید.

$$\int_{0}^{3} dx \int_{0}^{x} f(x,y)dy + \int_{3}^{6} dx \int_{0}^{6-x} f(x,y)dy$$

فرض بر آن است که تابع f پیوسته است.

۷. انتگرال دوگانه‌ی $\iint_R xy\ dA$ را که در آن R ناحیه‌ای است محدود به محورهای مختصات و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ محاسبه کنید.

۸. مجموعه‌ی D را همبند می‌نامیم اگر برای هر $P,Q\in D$، یک منحنی با معادلات پارامتری $x=x(t)\ ,\ y=y(t)$ به ازای $0\le t\le 1$ وجود داشته باشد به قسمی که x و y توابعی پیوسته باشند، برای هر $t\in[0,1]$ نقطه‌ی $(x(t),y(t))$ در D قرار گیرد، $P=(x(0),y(0))$ و $Q=(x(1),y(1))$.
نشان دهید اگر تابع دو متغیره‌ی f روی حوزه‌ی همبند D به مساحت A پیوسته باشد، آنگاه یک نقطه مثل (a,b) در D وجود دارد که

$$\iint_R f(x,y)\ dA = Af(a,b)$$

(گزاره‌ی فوق قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌های دوگانه است.)

۹. انتگرال $\iint_D \frac{y}{x^{2}+y^{2}}\ dxdy$ را روی ناحیه‌ی D، محصور بین سهمی $y=x^{2}$ و خط $y=x$، به دست آورید.

۱۰. الف) نشان دهید اگر f و g دو تابع پیوسته بر فاصله‌ی $[a,b]$ باشند، آنگاه

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^{2}(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^{2}(x)dx}$$

(راهنمایی: از انتگرال $\iint_A (f(x)g(y)-f(y)g(x))^{2}\ dxdy$ روی ناحیه‌ی مناسب A، استفاده کنید)
ب) اگر تابع f تابعی پیوسته و مثبت روی $[a,b]$ باشد، نشان دهید

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \ge (b-a)^{2}$$

۱۱. مطلوب است محاسبه‌ی $I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$.
(راهنمایی: $\int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ را با استفاده از مختصات قطبی به دست آورید.)

۱۲. انتگرال $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx$ را حساب کنید. (راهنمایی: از رابطه‌ی $\int_a^b e^{-xy}dy = \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ استفاده کنید.)

۱۳. انتگرال‌های دو یا سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیرهای مناسب محاسبه کنید.
الف) $\iint_D \frac{x^2 \sin xy}{y}\, dxdy$ که در آن D ناحیه‌ی محدود به منحنی‌های $x^2 = \pi y$، $x^2 = \frac{\pi y}{2}$، $y^2 = x$ و $y^2 = \frac{x}{2}$ می‌باشد.
ب) $\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}\, dxdy$ که در آن D محدود است به خطوط $y = 0$، $y = x$ و $x + y = \frac{\pi}{2}$.
ج) $\iiint_T yz\, dxdydz$ که در آن T ناحیه‌ی محدود به صفحات $x+y+z = 2$، $x+y+z = -2$، $x-y+z = 3$، $x-y+z = -3$، $x+y-z = 1$ و $x+y-z = -1$ می‌باشد.

۱۴. به کمک تغییر متغیرهای $x = u\cos^4 v$ و $y = u\sin^4 v$ انتگرال دوگانه‌ی

$$\iint_D \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\, dxdy$$

را محاسبه کنید که در آن D ناحیه‌ی محدود به خطوط $x = 0$، $y = 0$ و منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ می‌باشد.

۱۵. با استفاده از انتگرال دوگانه مساحت ناحیه محصور بین دوایر $x^2+y^2 = x$ و $x^2+y^2 = 2x$ و خطوط $y = 0$ و $y = x$ را به دست آورید.

۱۶. حجم محصور از بالا به کره‌ی $x^2+y^2+z^2 = a^2$، از زیر به مخروط $z^2 = (x^2+y^2)\cot^2\beta$ و از طرفین به صفحات $y = x\tan\alpha$ و $y = 0$ را به دست آورید. (α و β اعداد حقیقی ثابت و $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ هستند.)

۱۷. ناحیه‌ی $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq 4\pi^2\}$ و تابع $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$ مفروضند. مقدار $\iint_D f(x,y)\, dxdy$ را بدست آورید.

۱۸. فرض کنیم f تابعی مشتق‌پذیر باشد. برای هر عدد مثبت t تعریف می‌کنیم

$$D_t = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2+z^2 \leq t^2\}$$
$$g(t) = \iiint_{D_t} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

مطلوب است محاسبه‌ی $\frac{dg}{dt}$ بر حسب تابع f.

۱۹. مطلوب است مساحت ناحیه‌ی محصور به خم های $y = x^۲$, $۲y = x^۲$, $y^۲ = x^۳$, $۲y^۲ = x^۳$.

۲۰. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\iiint_T zdxdydz$ که در آن T ناحیه‌ی بین صفحه‌ی $z = ۰$ و نیمه‌ی بالایی کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲ = ۱$ می‌باشد.

(ب) $\int_۰^۱ \int_۰^{\cos^{-۱} y} e^{\sin x}\ dxdy$.

۲۱. مساحت ناحیه‌ی محدود به خم‌های $x^۲ + y^۲ = ۲x$ و $x^۲ + y^۲ = ۴x$ و خطوط $y = x$ و $y = ۰$ را به دست آورید.

۲۲. حجم جسم محدود به استوانه‌های $y^۲ = ۴ - ۳x$ و $y^۲ = x$ و صفحات $z = ۹$ و $z = -۹$ را به دست آورید.

۲۳. حجم ناحیه‌ای را بدست آورید که توسط سه رویه‌ی $z^۲ = ۲xy$, $x + y = ۲$, $x + y = ۱$محصور شده است.

۲۴. با استفاده از تغییر متغییرهای $u = x^۲ - y^۲$ و $v = ۲xy$، انتگرال دوگانه‌ی $\iint_D x^۲y^۲(x^۲ + y^۲)dxdy$ را به دست آورید که D ناحیه‌ای در ربع اول و محدود به هذلولی‌های $xy = ۲$, $xy = ۱$, $x^۲ - y^۲ =$ ۱ , $x^۲ - y^۲ = ۹$ است.

۲۵. مطلوبست محاسبه انتگرال دوگانه‌ی $\int_۰^۲ (\int_{y/۲}^۱ \cos(\frac{\pi}{۲}x^۲)dx)dy$.

۲۶. انتگرال دوگانه $\iint_D |x-y|e^{x-y}dxdy$ را حساب کنید که در آن ناحیه‌ی D محدود به خطوط $x - y = ۰$، $x - y = -۴$ ، $x + y = ۰$ و $x + y = ۴$ است.

۲۷. G ناحیه‌ی محصور به خم‌های $xy = ۱$ و $xy = ۳$ و $x(۱-y) = ۲$ و $x(۱-y) = ۱$ است. مطلوب است محاسبه انتگرال $\iint_G x\ dxdy$.

۲۸. انتگرال $\iint_D \cos(\frac{x-y}{x+y})\, dxdy$ را روی ناحیه‌ی D محصور به خطوط $x = ۰$ و $y = ۰$ و $x + y = ۲$ بیابید.

۲۹. با استفاده از انتگرال دوگانه در مختصات قطبی حجم ناحیه‌ی T را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) T محدود به سهمیگون $az = x^۲ + y^۲$ و صفحه‌ی $z = a$ است ($a > ۰$).

ب) T بین کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ و سهمیگون $x^۲+y^۲=۴(۱-z)$ محصور است.

(ج) T ناحیه خارج مخروط $x^۲+y^۲-z^۲=۰$ و داخل کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ است.

۳۰. با استفاده از مختصات قطبی انتگرال دوگانه‌ی

$$\iint_D \sqrt{\frac{۱-x^۲-y^۲}{۱+x^۲+y^۲}}\,dxdy$$

را محاسبه کنید. که در آن D قرص واحد $\{(x,y)\in\mathbb{R}^۲ : x^۲+y^۲\leq ۱\}$ است.

۳۱. انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را حساب کنید.

الف) $\int_۰^۱\int_۰^۱\int_۰^۱ (xy+yz+zx)dxdydz$.

ب) $\int_۰^۱ dx\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲}} dy\int_۰^{\sqrt{۱-x^۲-y^۲}} \frac{dz}{\sqrt{۱-x^۲-y^۲-z^۲}}$.

۳۲. مقدار متوسط تابع سه متغیره‌ی f روی $T\subseteq\mathbb{R}^۳$، که حجم آن برابر V است به صورت $\frac{۱}{V}\iiint_T f(x,y,z)\,dV$ تعریف می‌شود. با توجه به این تعریف، مقدار متوسط تابع f با ضابطه‌ی $f(x,y,z)=xy+xz+yz$ را روی هرمی که از برخورد صفحه‌ی $x+y+z=۱$ با صفحات مختصات پدید می‌آید به دست آورید. آیا می‌توان در T نقطه‌ای را به دست آورد که در آن f مقدار متوسط خود را اختیار کند؟

۳۳. مطلوب است انتگرال $\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}}dV$ که در آن T ناحیه‌ای است در یک هشتم اول فضا محدود به مخروط بیضوی $z^۲=\frac{۱}{۴}x^۲+\frac{۱}{۹}y^۲$ و صفحات $x=۰$ ، $y=۰$ و $z=۱$.

۳۴. انتگرال‌های دوگانه‌ی زیر را با تبدیل مختصات دکارتی به قطبی محاسبه کنید.

الف) $\iint_D \sqrt{x^۲+y^۲}dxdy$ که در آن $D=\{(x,y)\in R^۲ : x^۲+y^۲\leq ۹\}$.

ب) $\iint_D \frac{\sin\sqrt{x^۲+y^۲}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}dxdy$ که در آن $D=\{(x,y)\in R^۲ : \frac{\pi^۲}{۱۶}\leq x^۲+y^۲\leq\frac{\pi^۲}{۹}\}$.

ج) $\iint_D \tan^{-۱}(\frac{y}{x})dxdy$ که در آن $D=\{(x,y)\in R^۲ : ۱\leq x^۲+y^۲\leq ۴, \frac{x}{\sqrt{۳}}\leq y\leq\sqrt{۳}x\}$.

۳۵. انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را با تغییر متغیر استوانه‌ای محاسبه کنید.

الف) $\iiint_T x^۲y^۲\ dxdydz$ که در آن T ناحیه محدود به مخروط $z=\sqrt{x^۲+y^۲}$ و صفحه‌ی $z=a$ $(a>۰)$ است.

ب) $\iiint_T (x^۳+y^۳)\ dxdydz$ که در آن T ناحیه محدود به استوانه‌ی $x^۲+y^۲=y$، سهمیگون $z=x^۲+y^۲$ و صفحه‌ی $z=۰$ است.

۳۶. با استفاده از مختصات استوانه‌ای حجم ناحیه‌ی T شامل مبدأ مختصات و محدود به هذلولیگون $x^۲+y^۲-z^۲=۱$ و کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۳$ را پیدا کنید.

۳۷. مقدار انتگرال‌های سه‌گانه‌ی زیر را به کمک تغییر متغیر کروی پیدا کنید.

الف) $\iiint_T \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$ که در آن T محدود است به استوانه‌ی $x^2+y^2=4$ و مخروط $x^2+y^2=z^2$.

ب) $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}\, dxdydz$ که در آن T ناحیه‌ی درونی کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ است.

ج) $\iiint_T \frac{1}{\sqrt{((x^2+y^2+z^2)^3}}\, dxdydz$ که در آن T بین دو کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=e$ قرار دارد.

۳۸. با استفاده از مختصات کروی حجم ناحیه‌ی مشترک بین کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4z-3$ و مخروط $z^2=4(x^2+y^2)$ را پیدا کنید.

۱. انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{ds}{x-y}$ که در آن C پاره خط واصل بین دو نقطه‌ی $P=(۰,-۳)$ و $Q=(۶,۰)$ است.

ب) $\int_C \frac{y}{\sqrt{x}}ds$ که در آن معادلات پارامتری C عبارتند از $x=۳t^۲$ و $y=۲t^۳$ به ازای $۱\leq t\leq ۲$.

۲. نشان دهید انتگرال خطی $\int_C f(x,y)ds$ در طول منحنی C با معادله‌ی قطبی $r(\theta)=r, \alpha\leq\theta\leq\beta$، برابر است با

$$\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^۲+(\frac{dr}{d\theta})^۲}d\theta$$

۳. انتگرال‌های خطی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_C \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^۲+y^۲}$ که در آن C دارای معادلات پارامتری $x=۲\cos t$، $y=۲\sin t$ به ازای $۰\leq t\leq\pi$ است.

ب) $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ که در آن C مربعی است با رئوس $(۱,۰)$، $(۰,۱)$، $(-۱,۰)$، $(۰,-۱)$ و جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

ج) $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^۲+xy+y^۲}$ که در آن C دایره‌ای به معادلات پارامتری $x=a\cos t$ ، $y=a\sin t$ ، $(a>۰)$ به ازای $۰\leq t\leq ۲\pi$ است.

۴. فرض کنید C خم بسته‌ی هموار است که نسبت به مبدا متقارن است. ثابت کنید

$$\oint_C (yx^۳+e^y)dx+(xy^۳+xe^y-۲y)dy=۰$$

۵. صحت قضیه‌ی گرین را برای انتگرال خط $\oint_C(-x^۲y)dx+(xy^۲)dy$ بررسی کنید که در آن C مرز ناحیه‌ی محصور بین دوایر $x^۲+y^۲=۴$ و $x^۲+y^۲=۱۶$ می‌باشد.

۶. فرض کنید $f(x,y)=(|x|+|y|)^{-۱}$ و C مربعی با رئوس $A=(۱,۰)$، $B=(۰,۱)$، $C=(-۱,۰)$ و $D=(۰,-۱)$ باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت یکبار پیموده می‌شود. مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C f(x,y)dx+f(x,y)dy$.

۷. الف) با استفاده از قضیه‌ی گرین نشان دهید هرگاه توابع دو متغیره‌ی P و Q روی حوزه‌ی همبند ساده‌ی D دارای مشتقات نسبی پیوسته باشند و در هر نقطه‌ی $(x,y)\in D$ داشته باشیم $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ آن‌گاه

$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

یک میدان گرادیان است.

ب) مطلوب است محاسبه انتگرال $\int_C \frac{x-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x+y}{x^۲+y^۲}dy$ وقتی که C یک منحنی هموار بسته حول مبدأ مختصات باشد.

ج) انتگرال قسمت (ب) را در حالتی محاسبه کنید که C یک منحنی هموار ساده‌ی بسته باشد ولی مبدأ مختصات در داخل C نباشد.

۸. اگر γ کمان OA از خم به معادله‌ی $y = xe^{x-۱}$ باشد، به طوری که $A = (۱,۱)$ و $O = (۰,۰)$، مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی‌الخط $\int_\gamma (۳x^۲y + y^۳)dx + (x^۳ + ۳xy^۲)dy$.

۹. مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال خط $\int_C |y|dx + |x|dy$ که C منحنی متشکل از کمان AB، قسمتی از دایره‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ بین نقطه‌ی $A = (۰,۲)$ و $B = (-۱,۱)$ و BC قسمتی از خط $x + ۶y = ۵$ بین نقطه‌ی $B = (-۱,۱)$ و $C = (۲,۰/۵)$ است.

۱۰. در هر یک از حالات زیر تحقیق کنید آیا میدان $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ یک میدان گرادیان است؟ در صورت مثبت بودن جواب یک تابع دو متغیره‌ی f همرا با دامنه‌اش چنان تعیین کنید که در آن دامنه بردار گرادیان تابع f برابر $\vec{F}$ باشد.

الف) $\vec{F} = (y - \frac{\sin^۲ y}{x^۲})\vec{i} + (x + \frac{\sin ۲y}{x})\vec{j}$.

ب) $\vec{F} = (۲x \cos^۲ y)\vec{i} + (۲y - x^۲ \sin ۲y)\vec{j}$.

۱۱. به کمک قضیه‌ی گرین انتگرال‌های خطی زیر را، که در آن‌ها جهت حرکت بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، محاسبه کنید.

الف) $\int_C \sqrt{x^۲ + y^۲}dx + (xy^۲ + y\ln(x + \sqrt{x^۲ + y^۲}))dy$ که در آن C مربعی است با رئوس $(۰,۱)$، $(۴,۰)$، $(۴,۵)$ و $(۱,۵)$.

ب) $\int_C \frac{xy^۲}{۱+x^۲}dx + y\ln(۱+x^۲)dy$ که در آن C دایره‌ی $x^۲ + y^۲ + ۲y = ۰$ می‌باشد.

۱۲. به کمک انتگرال خط مساحت A از نواحی داده شده‌ی زیر را محاسبه کنید.

الف) D محدود است به منحنی بسته‌ی C با معادلات پارامتری $x = a\cos^۳ t$، $y = a\sin^۳ t$، که در آن $a > ۰$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$.

ب) D محدود است به منحنی بسته‌ی C (کاردیوئید) با معادلات پارامتری $x = ۲a\cos t - a\cos ۲t$، $y = ۲a\sin t - a\sin ۲t$، که در آن $a > ۰$ و $۰ \leq t \leq ۲\pi$.

۱۳. مساحت رویه‌ی S را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) S قسمتی از کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ax$ بریده می‌شود

.($a > ۰$)

ب) S قسمتی از استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ax$ است که در کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = a^۲$ قرار دارد ($a > ۰$).

ج) S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ است که بین صفحه‌ی $z = ۰$ و استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲y$ قرار دارد.

۱۴. انتگرال‌های رویه‌ای زیر را حساب کنید.

الف) $\iint_S xyz\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از صفحه‌ی $x + y + z = ۱$ است که در یک هشتم اول فضا قرار دارد.

ب) $\iint_S y\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از سهمی‌گون $y = ۲ - x^۲ - z^۲$ به ازای $y \geq ۰$ است.

ج) $\iint_S (x^۲y^۲ + x^۲z^۲ + y^۲z^۲)\, d\sigma$ که در آن S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^۲ + y^۲}$ است که توسط استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۲x$ بریده می‌شود.

۱۵. انتگرال‌های رویه‌ای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\iint_S \vec{F}.n\, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S نیم کره‌ی $z = \sqrt{۹ - x^۲ - y^۲}$ می‌باشد.

ب) $\iint_S \vec{F}.n\, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = \vec{i} - y^۲\vec{j} - z\vec{k}$ و S قسمتی از رویه‌ی $z = xy$ است که در بالای مربع $D = \{(x, y) : ۰ \leq y \leq ۲\ ,\ ۰ \leq x \leq ۳\}$ قرار دارد.

ج) $\iint_S \vec{F}.n\, d\sigma$ که در آن $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ و صفحات $z = ۰$ و $z = ۳$ است.

۱۶. به کمک قضیه واگرایی گوس انتگرال رویه‌ای $\iint_S \vec{F}.nd\sigma$ را در هر یک از حالات زیر پیدا کنید.

الف) $\vec{F} = ۴x\vec{i} - ۲y\vec{j} + \vec{k}$ و S کره‌ی $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۱$ است.

ب) $\vec{F} = ۳x\vec{i} - y^۲\vec{j} + z^۲\vec{k}$ و S رویه‌ی بسته حاصل از برخورد استوانه $x^۲ + y^۲ = ۲$ و صفحات $z = ۰$ و $z = ۱$ است.

ج) $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و S هر رویه‌ی بسته‌ای است که دارای شرایط قضیه‌ی واگرایی است.

۱۷. به کمک قضیه‌ی استوکس انتگرال خطی $\int_C \vec{F}.dr$ را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

الف) $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} - y\vec{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که در صفحه‌ی $z = x$ از برخورد صفحات $x = ۰$، $x = ۱$، $y = ۰$ و $y = ۲$ به وجود می‌آید.

ب) $\vec{F} = -y\vec{i} + x^۲\vec{j} + z\vec{k}$ و C منحنی بسته‌ای است که از برخورد استوانه‌ی $x^۲ + y^۲ = ۱$ با صفحه‌ی $x + y + z = ۲$ پدید می‌آید.

ج) $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ و C مثلثی است که رئوس آن به ترتیب عبارتند از $(۳, ۰, ۰)$، $(۱, ۰, ۳)$ و $(۲, ۱, ۳)$.

د) $\vec{F}=-y\vec{i}+x\vec{j}-z\vec{k}$ و C منحنی حاصل از برخورد صفحه‌ی $z=x$ با کره‌ی $x^۲+y^۲+z^۲=۱$ است (جهت حرکت روی C از طرف مثبت محور zها بر خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود).

۱۸. فرض کنید f تابعی سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته است. نشان دهید

$$\nabla\cdot(f\nabla f)=\|\nabla f\|^۲+f\nabla^۲ f$$

که در آن $\nabla^۲ f:=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$ بنام لاپلاسین تابع f نامیده می‌شود.

۱۹. فرض کنید $\mathbf{F}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k}$ میدانی برداری تعریف شده بر ناحیه‌ای از فضای $\mathbb{R}^۳$ بوده، توابع P، Q و R مشتقات مرتبه دوم پیوسته داشته باشند.

الف) مطلوبست محاسبه $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$.

ب) نشان دهید $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^۲\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$ ، که در آن $\nabla^۲\mathbf{F}:=(\nabla^۲P)\mathbf{i}+(\nabla^۲Q)\mathbf{j}+(\nabla^۲R)\mathbf{k}$.

۲۰. فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری مشتق‌پذیر هستند. نشان دهید

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$$

۲۱. فرض کنید f و g دو تابع سه متغیره با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده سطح S و منحنی مرزی آن، C، بوده، $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه بر سطح S باشد. نشان دهید

الف) $\int_C (f\nabla g)\cdot dr=\iint_S(\nabla f\times\nabla g)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$

ب) $\int_C (f\nabla g+g\nabla f)\cdot dr=۰$

۲۲. برای بردار یکه $\mathbf{n}$،نماد $\frac{\partial f}{\partial n}$ نماد دیگری برای مشتق سویی تابع f در راستای $\mathbf{n}$ است (به عبارت دیگر $\frac{\partial f}{\partial n}=D_n f$ و در نتیجه اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، $\frac{\partial f}{\partial n}=\nabla f\cdot\mathbf{n}$). فرض کنید T ناحیه‌ای بسته و کراندار از فضای $\mathbb{R}^۳$ و S سطح محصور کننده آن باشد. به علاوه فرض کنید $\mathbf{n}$ بردار قائم یکه بیرونی سطح S است. اگر f و g دو تابع با مشتقات مرتبه دوم پیوسته در ناحیه‌ای از فضا در برگیرنده حجم T و سطح S باشند، نشان دهید

الف) $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\ d\sigma = \iiint_T \nabla^۲ f\ dV$

ب) $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\ d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g + \nabla f \cdot \nabla g)\ dV$

ج) $\iint_S (f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n})\ d\sigma = \iiint_T (f\nabla^۲ g - g\nabla^۲ f)\ dV$