حد و پیوستگی توابع چندمتغیره

قبلا از بیان مطالب این بخش، نکات زیر را یادآوری می‌کنیم. صفحه دکارتی را با نماد $\mathbb{R}^2$ و فضای دکارتی را با نماد $\mathbb{R}^3$ نشان می‌دهیم. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \{(x,y);\ x,y\in\mathbb{R}\} \\ \mathbb{R}^3 &= \{(x,y,z);\ x,y,z\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

در راستای تعمیم مجموعه‌های فوق، فرض کنیم $n\in\mathbb{N}$ عددی طبیعی باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1,x_2,\ldots,x_n);\ x_1,x_2,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

هر عضو مجموعه $\mathbb{R}^n$ را یک نقطه از این مجموعه نامیده، نقطه $(x_1,\ldots,x_n)$ از $\mathbb{R}^n$ را برای سهولت با نماد x نشان می‌دهیم. برای بیان مفاهیم حد و پیوستگی برای توابع چندمتغیره لازم است ابتدا مفهومی به نام فاصله را در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف کنیم. برای این منظور ابتدا این مفهوم را در مجموعه‌های $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ مرور می‌کنیم. همانطور که می‌دانیم فاصله دو نقطه (x_1,y_1) و (x_2,y_2) در صفحه دکارتی برابر است با $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. به همین ترتیب اگر (x_1,y_1,z_1) و (x_2,y_2,z_2) دو نقطه در فضا باشند آنگاه فاصله (اقلیدسی) این دو نقطه برابر $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ خواهد بود. اکنون بر این مبنا فاصله را در فضای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم.

تعریف

برای $x=(x_1,\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,\ldots,y_n)$ در $\mathbb{R}^n$ فاصله (اقلیدسی) این دو نقطه را به صورت $\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$ تعریف می‌کنیم و آن را با نماد $\|x-y\|$ نشان می‌دهیم. پس

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

یکی دیگر از مفاهیمی که برای بیان حد توابع به آن نیاز داریم، مفهوم همسایگی است.

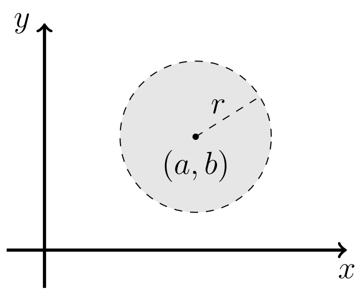
تعریف

برای نقطه $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ و عدد $r > 0$ مجموعه تمام نقاطی از $\mathbb{R}^n$ که فاصله آن‌ها از p کمتر از r است را همسایگی نقطه p به شعاع r می‌نامیم و آن را با نماد $B(p; r)$ نشان می‌دهیم. پس

$$B(p; r) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x - p\| < r\}$$

به طور مثال، در حالتی که $n = 2$ و $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ خواهیم داشت

$$B(p; r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\}$$

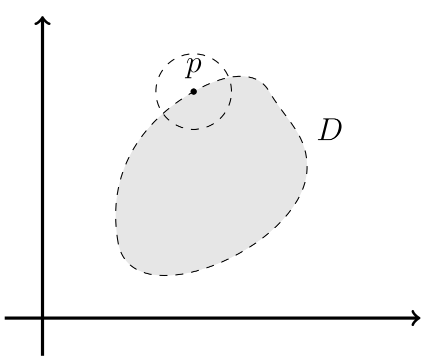


یادآوری می‌کنیم حد یک تابع یک متغیره در یک نقطه، رفتار تابع را برای نقاط نزدیک به آن نقطه بررسی می‌کند و در واقع این که تابع در خود آن نقطه تعریف شده باشد یا خیر، در این بحث مهم نیست. برای اینکه بتوانیم این دیدگاه را به نحو مناسب برای توابع چندمتغیره بیان کنیم مفهومی به نام نقطه حدی برای یک مجموعه را تعریف می‌کنیم.

تعریف

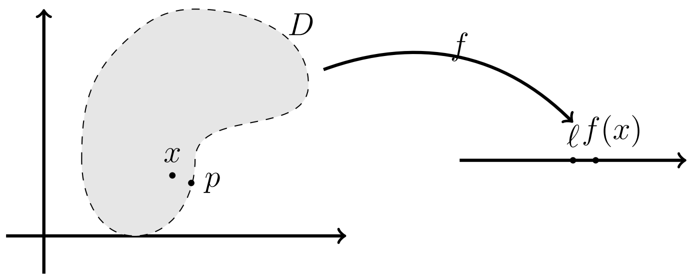
فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$. نقطه $p \in \mathbb{R}^n$ را یک نقطه حدی برای دامنه D نامیم هرگاه برای هر $r > 0$، $(B(p; r) - \{p\}) \cap D \neq \emptyset$.

بر اساس این تعریف، اگر p یک نقطه حدی برای زیرمجموعه D از فضای $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه با استفاده از نقاطی از D، غیر از خود نقطه p، می‌توانیم به نقطه p به هر اندازه که بخواهیم نزدیک شویم.



اکنون آماده‌ایم تا مفهوم حد را برای توابع چندمتغیره بیان کنیم. تابع $f : D \to \mathbb{R}^n$ را در نقطه حدی

از مجموعه D دارای حد ℓ می‌نامیم و با نماد $\lim_{x \xrightarrow{D} p} f(x) = \ell$ نشان می‌دهیم هرگاه با انتخاب $p \in \mathbb{R}^n$ نقاطی از مجموعه D غیر از p و به اندازه کافی نزدیک به p بتوانیم مقادیر f را به اندازه دلخواه به ℓ نزدیک کنیم.



به زبان ریاضی،

تعریف

تابع $f : D \to \mathbb{R}$ را در نقطه حدی $p \in \mathbb{R}^n$ برای مجموعه D دارای حد ℓ نامیم هرگاه

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D, \quad x \in B(p, \delta) - \{p\} \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

یا، به بیانی دیگر،

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D, \quad 0 < \|x - p\| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon$$

در زیر، نحوه استفاده از تعریف فوق را برای اثبات صحت حد در چند مورد مشاهده می‌کنیم. **مثال.** با استفاده از تعریف حد، صحت هر یک از حدود زیر را تحقیق کنید.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

ابتدا توجه می‌کنیم تابع f با دستور $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ بر مجموعه $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ تعریف شده است. نقطه $p = (0,0)$ برای این مجموعه یک نقطه حدی است. اکنون برای اثبات صحت حد فوق با استفاده از تعریف نشان می‌دهیم

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x,y) \in D, \quad 0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta \ \Rightarrow \ |f(x,y) - 0| = |\frac{x^3}{x^2+y^2}| < \epsilon$$

برای $\epsilon > 0$ ابتدا فاصله $f(x,y)$ تا حد مطرح شده، یعنی $\ell = 0$، و نحوه ارتباط آن با $\|(x,y) - (0,0)\|$ یا

$\sqrt{x^۲+y^۲}$ را بررسی می‌کنیم.

$$|f(x,y)-۰| = |\frac{x^۳}{x^۲+y^۲}| = \frac{x^۲}{x^۲+y^۲}|x| \leq |x| \leq \sqrt{x^۲+y^۲}$$

در نامساوی‌های فوق، از نامساوی $x^۲ \leq x^۲+y^۲$ استفاده کرده‌ایم. به این ترتیب برای داشتن $|f(x,y)-۰| < \epsilon$ کافی است با انتخاب مناسب δ شرایطی را ایجاد کنیم که $\sqrt{x^۲+y^۲} < \epsilon$. پس به طور مثال اگر $\delta > ۰$ را با شرط $\delta \leq \epsilon$ انتخاب کنیم آنگاه برای $(x,y) \in D$ با شرط $\sqrt{x^۲+y^۲} < \delta$، با توجه به نامساوی‌های فوق، خواهیم داشت

$$|f(x,y)-۰| \leq \sqrt{x^۲+y^۲} < \delta \leq \epsilon$$

به این ترتیب با استفاده از تعریف ثابت کردیم تابع f در نقطه $p = (۰,۰)$ حد برابر ۰ دارد.

ب) $\lim_{(x,y,z)\to(۰,۰,۰)} (x-۲z)\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲}) = ۰$.

اگر f تابع سه متغیره با دستور $f(x,y,z) = (x-۲z)\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲})$ باشد آنگاه این تابع بر دامنه $D = \mathbb{R}^۳ - \{(۰,۰,۰)\}$ تعریف شده است. توجه می‌کنیم در اینجا نیز مبدا مختصات یک نقطه حدی برای D است. اکنون، بنا بر تعریف حد، باید نشان دهیم

$$\forall \epsilon > ۰,\ \exists \delta > ۰,\ \forall (x,y,z) \in D \quad \|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\| = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} < \delta \ \Rightarrow\ |f(x,y,z)-۰| < \epsilon$$

ابتدا عبارت $|f(x,y,z)-۰|$ و نحوه ارتباط آن با $\|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\| = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
|f(x,y,z)-۰| = |(x-۲z)\sin(\frac{۱}{x^۲+y^۲+z^۲})| &\leq |x-۲z| \leq |x|+۲|z| \\
&\leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} + ۲\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} \\
&= ۳\sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}
\end{aligned}$$

در نامساوی‌های فوق از کرانداری تابع $\sin$ و اینکه برای هر x، y و z همواره $|x|,|y|,|z| \leq \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲}$ استفاده کرده‌ایم. اکنون برای $\epsilon > ۰$ برای داشتن $|f(x,y,z)-۰| < \epsilon$ کافی است $۳\sqrt{x_۲+y^۲+z^۲} < \epsilon$.

برای این منظور نیز کافی است عدد $\delta > ۰$ را با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{۳}$ انتخاب کنیم. اکنون به سادگی مشاهده می‌شود برای $(x, y, z) \in D$ اگر $۰ < \|(x, y, z) - (۰, ۰, ۰)\| < \delta$ آنگاه $|f(x, y, z) - ۰| < \epsilon$.

ج) $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{x \sin y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} = ۰$.

با در نظر گرفتن تابع f با دستور $f(x, y) = \frac{x \sin y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}$ مشاهده می‌شود این تابع بر $D = \mathbb{R}^۲ - \{(۰, ۰)\}$ تعریف شده است و نقطه $(۰, ۰)$ نقطه‌ای حدی برای این دامنه می‌باشد. طبق تعریف، نشان می‌دهیم برای هر $\epsilon > ۰$ عدد $\delta > ۰$ وجود دارد به گونه‌ای که اگر $(x, y) \in D$ با شرط $۰ < \|(x, y) - (۰, ۰)\| < \delta$ انتخاب شود آنگاه $|f(x, y) - ۰| < \epsilon$. توجه می‌کنیم چون برای هر $(x, y) \in D$، $(x, y) \neq (۰, ۰)$، بنابر این شرط $\sqrt{x^۲ + y^۲} > ۰$ برای تمام اعضای D برقرار است. مانند مثال‌های قبل، ابتدا ارتباط مناسب بین $|f(x, y) - ۰|$ و فاصله نقطه (x, y) تا $(۰, ۰)$، یعنی $\sqrt{x^۲ + y^۲}$، را تعیین می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
|f(x, y) - ۰| = |\frac{x \sin y}{\sqrt{x^۲ + y^۲}}| &= \frac{|x|}{\sqrt{x^۲ + y^۲}} |\sin y| \\
&\leq |\sin y| \\
&\leq |y| \leq \sqrt{x^۲ + y^۲}
\end{aligned}
$$

در حصول نامساوی فوق از نامساوی‌های $|x|, |y| \leq \sqrt{x^۲ + y^۲}$ و نامساوی $|\sin y| \leq |y|$ استفاده شده است. اکنون برای $\epsilon > ۰$ با انتخاب $\delta > ۰$ با شرط $\delta \leq \epsilon$، اگر $(x, y) \in D$ با شرط $\sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta$ انتخاب شود آنگاه با توجه به نامساوی فوق

$$
|f(x, y) - ۰| \leq \sqrt{x^۲ + y^۲} < \delta \leq \epsilon
$$

و به این ترتیب، صحت حد فوق با استفاده از تعریف ثابت می‌شود.

اکنون که با مفهوم حد کمی آشنا شدیم، مفهوم پیوستگی را که به طور طبیعی با حد در ارتباط است بیان می‌کنیم. در تعریف پیوستگی، نقطه مورد نظر نقطه‌ای از دامنه تعریف تابع می‌باشد.

تعریف

تابع $f:D\to\mathbb{R}$ را در نقطه $p\in D$ پیوسته نامیم هرگاه $\lim_{x\to p} f(x)=f(p)$، یا به زبان ریاضی هرگاه

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D \quad \|x-p\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(p)|<\epsilon$$

مثال. نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y)=x-2y$ در نقطه $p=(1,-2)$ پیوسته است.

طبق تعریف، باید نشان دهیم $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} f(x,y)=f(1,-2)=5$، یا

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \|(x,y)-(1,-2)\|=\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}<\delta\ \Rightarrow\ |(x-2y)-5|<\epsilon$$

مانند مثال‌های بحث حد عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
|(x-2y)-5| &= |(x-1)-(2y+4)| \\
&\leq |x-1|+2|y+2| \\
&\leq \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}+2\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2} \\
&= 3\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=3\|(x,y)-(1,-2)\|
\end{aligned}$$

به این ترتیب برای $\epsilon>0$ اگر عدد $\delta>0$ را با شرط $\delta\leq\frac{\epsilon}{3}$ انتخاب کنیم آنگاه برای هر نقطه (x,y) در صفحه با شرط $\|(x,y)-(1,-2)\|<\delta$ خواهیم داشت

$$|f(x,y)-f(1,-2)|=|(x-2y)-5|\leq 3\|(x,y)-(1,-2)\|<3\delta\leq\epsilon$$

روشن است که بررسی پیوستگی هر تابع با استفاده از تعریف کاری دشوار و خسته‌کننده خواهد بود. بنابر این با استفاده از چند قضیه، روش ساختن توابع پیوسته را با شروع از توابع ساده‌تر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و توابع $f, g : D \to \mathbb{R}$ در نقطه $p \in D$ پیوسته باشند. آنگاه هر یک از توابع $f \pm g$، λf ($\lambda \in \mathbb{R}$ ثابت) و fg نیز در نقطه پیوسته خواهند بود. به علاوه اگر $g(p) \neq 0$ آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

نتیجه

با توجه به پیوستگی هر یک از توابع $f(x, y) = x$ و $g(x, y) = y$ در هر نقطه از $\mathbb{R}^2$ و با استفاده مکرر از قضیه فوق، هر تابع چندجمله بر حسب x و y در هر نقطه دلخواه از صفحه $\mathbb{R}^2$ پیوسته خواهد بود. پس به طور مثال، تابع f با دستور $f(x, y) = x^2y^3 - 2xy^2 + x^2 - y^2 + 2x + 3y - 1$ در هر نقطه از صفحه پیوسته است. به همین ترتیب ثابت می‌شود هر تابع چندجمله بر حسب متغیرهای x_1، …، x_n در هر نقطه از $\mathbb{R}^n$ پیوسته است.

مثال. تابع $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطه
$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2 - z^3}{x^2 + y^2 + z^2} & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$
مفروض است. نشان دهید f بر $\mathbb{R}^3$ تابعی پیوسته است.

باید نشان دهیم تابع f در هر نقطه دلخواه چون (x_0, y_0, z_0) از صفحه پیوسته است. با توجه به ضابطه تابع f، دو حالت زیر را برای این نقطه در نظر می‌گیریم.

الف) $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. در این حالت یک همسایگی از این نقطه وجود دارد که حاوی $(0, 0, 0)$ نباشد و در نتیجه تابع بر این همسایگی همه جا از ضابطه $f(x, y, z) = \dfrac{3xy^2 - z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$ پیروی می‌کند. در این حالت، با توجه به پیوستگی هر یک از توابع چندجمله‌ای $g(x, y, z) = 3xy^2 - z^3$ و $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ در نقطه (x_0, y_0, z_0) و این که $h(x_0, y_0, z_0) = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$، بنابر قضیه قبل، تابع $f(x, y, z) = \dfrac{g(x, y, z)}{h(x, y, z)}$ نیز در این نقطه پیوسته است.

ب) $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. در این حالت باید نشان دهید $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = f(0, 0, 0) = 0$. این کار را اجبارا با تعریف انجام می‌دهیم.

$$|f(x, y, z) - 0| = \frac{|3xy^2 - z^3|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{|3xy^2|}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{|z^3|}{x^2 + y^2 + z^2}$$

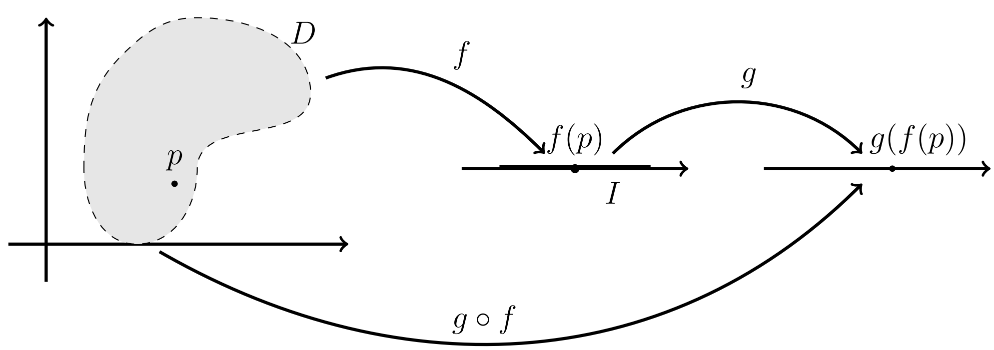
$$
\begin{aligned}
&= \frac{y^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}|۳x| + \frac{z^۲}{x^۲+y^۲+z^۲}|z| \\
&\leq ۳|x| + |z| \leq ۳\|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\| + \|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\| \\
&= ۴\|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\|
\end{aligned}
$$

به این ترتیب برای هر $\epsilon > ۰$ با انتخاب $\delta > ۰$ با شرط $\delta \leq \frac{\epsilon}{۴}$ به سادگی مشاهده می‌شود برای (x,y,z) با شرط $\|(x,y,z)-(۰,۰,۰)\| < \delta$ داریم $|f(x,y,z)-f(۰,۰,۰)| = |f(x,y,z)-۰| < \epsilon$. در نتیجه f در این نقطه نیز پیوسته است.

یکی دیگر از قضایای که امکان ایجاد توابع پیوسته جدید را مهیا می‌کند قضیه ترکیب توابع پیوسته است.

قضیه

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}$ و تابع $f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه $p \in D$ پیوسته باشد. اگر $I \subset \mathbb{R}$ بازه‌ای حاوی مجموعه $\{f(x); x \in D\}$ و تابع $g : I \to \mathbb{R}$ در نقطه $f(p)$ از این مجموعه پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ در نقطه p پیوسته خواهد بود.



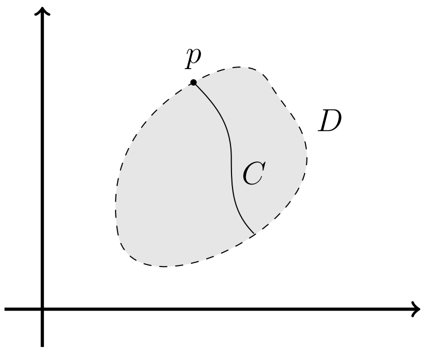
مثال. با استفاده از قضیه فوق نشان می‌دهیم تابع $f : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۳+y^۳}$ بر $\mathbb{R}^۲$ پیوسته است.

اگر تابع $g : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(x,y) = x^۳+y^۳$ و تابع $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه $h(t) = \sqrt[۳]{t}$ تعریف شده باشند آنگاه برای هر $(x,y) \in \mathbb{R}^۲$، $f(x,y) = h(g(x,y))$. بنابر این $f = h \circ g$. حال با توجه به اینکه تابع g در هر نقطه از $\mathbb{R}^۲$ و h نیز در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته هستند، بنابر قضیه قبل، تابع f نیز در هر نقطه از صفحه

$\mathbb{R}^۲$ پیوسته خواهد بود.

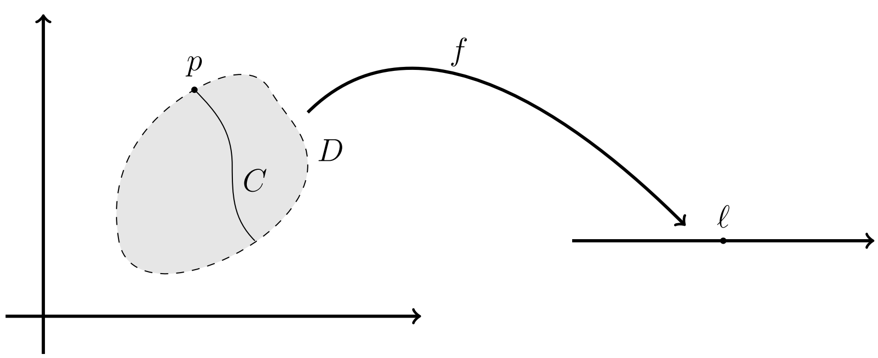
به همین ترتیب، هر یک از توابع $f(x,y)=\sin(\frac{x+y}{x^۴+y^۴+۱})$ یا $f(x,y,z)=e^{x-۲yz}$ در هر نقطه از دامنه تعریف خود پیوسته خواهند بود.

آخرین مطلبی که در این بخش مورد اشاره قرار می‌دهیم، گسترش مفاهیم حد چپ و راست توابع یک متغیره به توابع چندمتغیره است. بدیهی است که برای توابع چندمتغیره، نحوه نزدیک شدن به نقطه حدی توسط نقاط دامنه می‌تواند بسیار متنوع باشد.



فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ و $p\in\mathbb{R}^n$ یک نقطه حدی برای این دامنه باشد. همچنین فرض کنیم C زیرمجموعه‌ای از D باشد با این خاصیت که با استفاده از نقاط C نیز بتوانیم به نقطه p نزدیک شویم (به بیان دقیق‌تر p برای مجموعه C نیز یک نقطه حدی باشد).

اگر f تابعی تعریف شده بر دامنه D باشد آنگاه با محدود کردن دامنه تعریف تابع f به این زیرمجموعه و در نظر گرفتن تابع $f:C\to\mathbb{R}$ می‌توانیم رفتار حدی این تابع را در نقطه p بررسی کنیم. روشن است که اگر تابع $f:D\to\mathbb{R}$ در نقطه p حدی برابر ℓ داشته باشد (یا به بیان دیگر، $\ell=\lim_{x\xrightarrow{D}p}f(x)$) آنگاه تابع $f:C\to\mathbb{R}$ نیز در این نقطه دارای همان حد ℓ خواهد بود. یا به عبارت دیگر، $\lim_{x\xrightarrow{C}p}f(x)=\ell$.

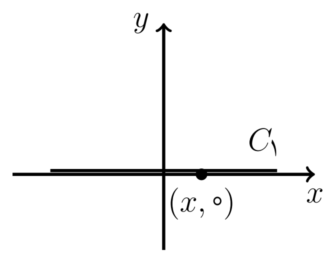


از این خاصیت در اثبات عدم وجود حد می‌توانیم استفاده کنیم.

مثال. نشان دهید هیچ‌یک از حدود زیر وجود ندارند.

الف) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{x}{|x|+|y|}$.

به روش برهان خلف، فرض کنیم حد فوق موجود و برابر ℓ باشد. اگر $C \subset \mathbb{R}^{۲}$ را محور x در نظر بگیریم آنگاه نقطه $(\circ,\circ)$ یک نقطه حدی برای C خواهد بود.



با توجه به اینکه $C=\{(x,\circ); x\in\mathbb{R}\}$، خواهیم داشت

$$\ell = \lim_{(x,y)\xrightarrow{C}(\circ,\circ)} f(x,y) = \lim_{x\to\circ} f(x,\circ) = \lim_{x\to\circ}\frac{x}{|x|+|\circ|} = \lim_{x\to\circ}\frac{x}{|x|}$$

اما می‌دانیم حد فوق وجود ندارد. پس تابع f در نقطه $(\circ,\circ)$ حد ندارد.

ب) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{xy}{x^{۲}+y^{۲}}$.

فرض کنیم $C_{۱}=\{(x,\circ); x\in\mathbb{R}\}$ محور x باشد. در این صورت

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_{۱}}(\circ,\circ)} f(x,y) = \lim_{x\to\circ} f(x,\circ) = \lim_{x\to\circ}\frac{x\times\circ}{x^{۲}+\circ^{۲}} = \circ$$

بنابراین اگر حد مورد نظر وجود داشته باشد مقدار آن باید برابر $\ell=\circ$ باشد. اکنون فرض کنیم $C_{۲}$ خط $y=x$ باشد. روشن است که نقطه $(\circ,\circ)$ یک نقطه حدی برای $C_{۲}$ است. داریم

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_{۲}}(\circ,\circ)} f(x,y) = \lim_{x\to\circ} f(x,x) = \lim_{x\to\circ}\frac{x\times x}{x^{۲}+x^{۲}} = \frac{۱}{۲}$$

با توجه به اینکه حد اخیر غیر صفر است پس این تابع نیز در $(\circ,\circ)$ حد ندارد.

ج) $\lim\limits_{(x,y)\to(\circ,\circ)} \dfrac{xy^{۲}}{x^{۲}+y^{۴}}$.

اگر C_1 خط $y = mx$ باشد آنگاه نقطه $(0,0)$ یک نقطه حدی برای C_1 است. داریم

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_1}(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{m^2x}{1+m^4x^2} = 0$$

بنابر این بر روی هر خطی که به نقطه $(0,0)$ نزدیک می‌شویم تابع فوق به مقدار صفر میل می‌کند. با وجود این نشان می‌دهیم حد وجود ندارد. فرض کنیم C_2 سهمی $x = y^2$ باشد. نقطه $(0,0)$ برای این سهمی یک نقطه حدی است. اگر y را به عنوان متغیر مستقل در نظر بگیریم آنگاه بر روی این سهمی $(x,y)\to(0,0)$ اگر و تنها اگر $y\to 0$. به این ترتیب

$$\lim_{(x,y)\xrightarrow{C_2}(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{(y^2)^2+y^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

پس این تابع نیز در $(0,0)$ حد ندارد.

تمرین‌های بخش حد و پیوستگی توابع چندمتغیره.

۱- صحت هر یک از حدود زیر را با استفاده از تعریف ثابت کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(|x|+|y|)^2} = 0$

ب) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3-\sin(yz^2)}{x^2+y^2+z^2} = 0$

۲- نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ بر $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

۳- نشان دهید تابع $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ با دستور $f(x,y,z) = \ln(1+x^2+2y^4+z^6)$ بر $\mathbb{R}^3$ پیوسته است.

۴- نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ در نقطه $(0,0)$ حد ندارد.