قاعده زنجیری و مشتق تابع ضمنی

یادآوری. قبلاً در مبحث توابع یک متغیره دیدیم که چگونه می‌توان مشتق تابع مرکب را محاسبه کرد. اگر $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر برحسب x و $x = x(t)$ تابعی مشتق‌پذیر برحسب t باشد، آن‌گاه $y = g(t) = f(x(t))$ نیز مشتق‌پذیر است و داریم

$$\frac{dy}{dt} = g'(t) = f'(x(t))x'(t).$$

در این بخش می‌خواهیم بحث مشتق تابع مرکب را به توابع چندمتغیره تعمیم دهیم.

فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی n متغیره تعریف شده بر D باشد. فرض کنیم $I \subset \mathbb{R}$ و توابع $x_1 = x_1(t)$، ...، $x_n = x_n(t)$ بر دامنه تعریف مشترک I تعریف شده، برای هر $t \in I$،

$$\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big) \in D$$

در این صورت می‌توانیم تابعی چون $g : I \to \mathbb{R}$ با ضابطه $g(t) = f\big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$ تعریف کنیم.

فرض توابع $x_1(t)$، ...، $x_n(t)$ در نقطه‌ای درونی چون $t_0 \in I$ و تابع f نیز در نقطه $\big(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big) \in D$ مشتق‌پذیر باشند. برای سهولت نقطه اخیر را با نماد p_0 نشان می‌دهیم. برای مقادیر کوچک Δt، قرار می‌دهیم $\Delta x_i := x_i(t_0 + \Delta t) - x_i(t_0)$ و $\Delta x := (\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$. با توجه به مشتق‌پذیری f در p_0، خواهیم داشت

$$f(p_0 + \Delta x) - f(p_0) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\Delta x_i$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
\frac{g(t_0 + \Delta t) - g(t_0)}{\Delta t} &= \frac{f\big(x_1(t_0 + \Delta t), \ldots, x_n(t_0 + \Delta t)\big) - f\big(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big)}{\Delta t} \\
&= \frac{f\big(x_1(t_0) + \Delta x_1, \ldots, x_n(t_0) + \Delta x_n\big) - f\big(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)\big)}{\Delta t} \\
&= \frac{f(p_0 + \Delta x) - f(p_0)}{\Delta t} \\
&\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\frac{\Delta x_i}{\Delta t}
\end{aligned}$$

اکنون وقتی $\Delta t \to 0$، $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \to (0, \ldots, 0)$ و در نتیجه تقریب فوق به سمت تساوی میل می‌کند. در عین حال

$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x_i}{\Delta t}=x_i'(t_0)$. در نتیجه

$$g'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t_0+\Delta t)-g(t_0)}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)\,x_i'(t_0)$$

رابطه فوق تحت نام قاعده زنجیری نامیده می‌شود. برای به خاطر سپردن این قاعده می‌توانیم از نماد لایب‌نیتس استفاده کنیم.

$$\frac{dg}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

البته توجه می‌کنیم که در فرمول بالا مشتق توابع x_i در نقطه t_0 و مشتقات جزیی تابع f در نقطه p_0 محاسبه می‌شوند.

مثال. فرض کنیم $f(x,y)=\sinh(x^2y)$، $x(t)=\ln t$ و $y(t)=e^t$. اگر $z(t):=f(x(t),y(t))$، دراینصورت مقدار $z'(t)$ را بدست آورید.

داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy\cosh(x^2y),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^2\cosh(x^2y)$$

در نتیجه، طبق قاعده زنجیری خواهیم داشت

$$z'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}(t)+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}(t)=2\ln t\,e^t\cosh(\ln^2 t\,e^t)\frac{1}{t}+\ln^2 t\,\cosh(\ln^2 te^t)e^t.$$

باید توجه داشت کاربرد اصلی قاعده زنجیری برای توابع چند متغیره، حل مسائلی مانند فوق نیست. چرا که در چنین مواردی می‌توانیم ضابطه تابع مرکب را مستقیما محاسبه کرده، مشتق را به دست آوریم. کاربردهای اصلی این قاعده را در مباحث بعدی (مانند بحث صفحه مماس بر یک رویه) مشاهده خواهیم کرد.

حالت کلی قاعده زنجیری: فرض کنیم $D\subset\mathbb{R}^n$ و $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر بر D باشد. همچنین فرض کنیم $E\subset\mathbb{R}^k$ و توابع $x_1(t_1,\ldots,t_k)$، ...، $x_n(t_1,\ldots,t_k)$ بر E تعریف شده بر آن مشتق‌پذیر باشند. همچنین برای هر $(t_1,\ldots,t_k)\in E$، فرض کنیم

$$\big(x_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_k)\big)\in D$$

در این صورت تابع مرکب $g:E\to\mathbb{R}$ با دستور $g(t_1,\ldots t_k)=f\big(x_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_k)\big)$ بر E

مشتق‌پذیر بوده، داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t_۱} &= \frac{\partial f}{\partial x_۱}\frac{\partial x_۱}{\partial t_۱}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_۱}\\ \frac{\partial g}{\partial t_۲} &= \frac{\partial f}{\partial x_۱}\frac{\partial x_۱}{\partial t_۲}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_۲}\\ &\vdots\\ \frac{\partial g}{\partial t_k} &= \frac{\partial f}{\partial x_۱}\frac{\partial x_۱}{\partial t_k}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}\end{aligned}$$

مثال. فرض کنیم $f(x,y,z)=(x+y)e^z$. هم‌چنین $x(u,v)=uv$، $y(u,v)=۲u$ و $z(u,v)=\ln(u+v)$. اگر $g(u,v):=f\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)$ مطلوب است محاسبه $\frac{\partial g}{\partial u}$.

با استفاده از قاعده فوق،

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}=e^{\ln(u+v)}v+۲e^{\ln(u+v)}+(uv+۲u)e^{\ln(u+v)}\frac{۱}{u+v}.$$

مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و $z=z(x,y)=xf(\frac{x}{y})$. نشان دهید z در معادله زیر صدق می‌کند.

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

اگر تابع دو متغیره $u(x,y)$ را باضابطه $u(x,y)=\frac{x}{y}$ در نظر بگیریم آنگاه $z(x,y)=xf\big(u(x,y)\big)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= f(\frac{x}{y})+\frac{\partial}{\partial x}\big(f(u(x,y))\big)\\ &= f(\frac{x}{y})+xf'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}=f(\frac{x}{y})+\frac{x}{y}f'(\frac{x}{y})\end{aligned}$$

به همین ترتیب،

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{-x}{y^۲}f'(\frac{x}{y}).$$

بنابراین

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xf(\frac{x}{y})+\frac{x^۲}{y}f'(\frac{x}{y})-\frac{x^۲}{y}f'(\frac{x}{y})=xf(\frac{x}{y})=z.$$

تمرین: فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده، $z=z(x,y)=f(bx-ay)$. نشان دهید که تابع z در معادله $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=۰$ صدق می‌کند.

مثال. ثابت کنید که تابع $f(x,t)=\int_{\circ}^{\frac{x}{۲\sqrt{۳t}}} e^{-\sigma^{۲}}d\sigma$ در معادله دیفرانسیل $۳\dfrac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}-\dfrac{\partial f}{\partial t}=\circ$ صدق می‌کند.

قرار می‌دهیم $u(x,t)=\dfrac{x}{۲\sqrt{۳t}}$ و $g(u)=\int_{\circ}^{u} e^{-\sigma^{۲}}d\sigma$. در این صورت $f(x,t)=g(u(x,t))$. باتوجه به قضیه اساسی حساب داریم $g'(u)=e^{-u^{۲}}$. طبق قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\, g'(u(x,t))=\frac{۱}{۲\sqrt{۳t}}e^{-\frac{x^{۲}}{۱۲t}}.$$

بنابراین

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}=\frac{-x}{۱۲t\sqrt{۳t}}e^{-\frac{x^{۲}}{۱۲t}}.$$

مجدداً با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}\, g'(u(x,t))=\frac{-x}{۴\sqrt{۳t^{۳}}}e^{-\frac{x^{۲}}{۱۲t}}.$$

بنابراین

$$۳\frac{\partial^{۲} f}{\partial x^{۲}}-\frac{\partial f}{\partial t}=\circ.$$

مثال. فرض کنید $f:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر صادق در معادله $\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{\partial f}{\partial y}=\circ$ باشد. اگر تابع $g:\mathbb{R}^{۲}\to\mathbb{R}$ با دستور $g(x,y)=f(x+y,x-y)$ تعریف شده باشد نشان دهید $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\circ$.

اگر قرار دهیم $u(x,y)=x+y$ و $v(x,y)=x-y$ آنگاه طبق تعریف تابع g، $g(x,y)=f\big(u(x,y),v(x,y)\big)$. در نتیجه، با استفاده از قاعده زنجیری

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\times ۱+\frac{\partial f}{\partial v}\times(-۱)=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial v}$$

اما بنا به فرض، اگر متغیرهای مستقل f را به جای x و y، متغیرهای u و v در نظر بگیریم آنگاه $\dfrac{\partial f}{\partial u}-\dfrac{\partial f}{\partial v}=\circ$. در نتیجه $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\circ$.

تابع ضمنی. فرض کنیم f تابعی بر حسب n متغیر مستقل $x_{۱}$، ...، x_n باشد. در این صورت معادله‌ای چون $f(x_{۱},\dots,x_n)=c$ ایجاد نوعی بستگی بین متغیرها می‌کند و در اثر این وابستگی، حداقل مقدار یکی از متغیرها وابسته به سایر متغیرها می‌شود (یا در واقع یکی از متغیرها تابعی از سایر متغیرها خواهد بود.) فرض کنیم معادله $f(x_{۱},\dots,x_n)=c$ باعث شود، به طور مثال، متغیر x_n به عنوان تابعی از متغیرهای $x_{۱}$، ...، $x_{n-۱}$ به صورت $x_n=g(x_{۱},\dots,x_{n-۱})$ حاصل شود. در اینصورت تابع $x_n=g(x_{۱},\dots,x_{n-۱})$ را تابع ضمنی متناظر با معادله فوق می‌نامیم.

تحت شرایطی می‌توانیم مشتقات جزئی تابع g را بدون داشتن ضابطه این تابع به دست آوریم. توجه می‌کنیم که بنا به فرض

برای هر $(x_۱, \dots, x_{n-۱})$ در دامنه‌ای مناسب از فضای $\mathbb{R}^{n-۱}$،

$$f(x_۱, \dots, x_{n-۱}, x_n) = f(x_۱, \dots, x_{n-۱}, g(x_۱, \dots, x_{n-۱})) = c$$

اکنون با فرض مشتق‌پذیری توابع f و g، با مشتق‌گیری از طرفین این رابطه نسبت به متغیر x_i، و با استفاده از قاعده زنجیری، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = ۰.$$

در نتیجه، اگر $\frac{\partial f}{\partial x_n} \neq ۰$،

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

برای حالت خاص $n = ۲$، اگر تحت رابطه $f(x, y) = c$ متغیر y تابعی مشتق‌پذیر از x باشد، آن‌گاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

مثال. فرض کنید z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به‌طور ضمنی توسط معادله $\ln(x^۲ + y^۲ + z^۲) = z$ داده شده باشد. توابع $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ را تعیین کنید.

قرار می‌دهیم $f(x, y, z) = \ln(x^۲ + y^۲ + z^۲) - z$. در این‌صورت داریم

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{-۲x}{x^۲ + y^۲ + z^۲}}{\frac{۲z}{x^۲ + y^۲ + z^۲} - ۱} = \frac{۲x}{x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲z},$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\frac{-۲y}{x^۲ + y^۲ + z^۲}}{\frac{۲z}{x^۲ + y^۲ + z^۲} - ۱} = \frac{۴y}{x^۲ + y^۲ + z^۲ - ۲z}.$$

مثال. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بوده و z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به‌طور ضمنی توسط معادله $z = f(xyz)$ داده شده باشد. نشان دهید z در معادله زیر صدق می‌کند

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = ۰.$$

اگر تابع سه متغیره g را با ضابطه $g(x,y,z) = z - f(xyz)$ تعریف کنیم آنگاه، طبق فرض z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x و y توسط معادله $g(x,y,z) = ۰$ داده شده است. در نتیجه طبق بحث فوق،

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{yzf'(xyz)}{۱ - xyf'(xyz)},$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial z}} = \frac{xzf'(xyz)}{۱ - xyf'(xyz)}.$$

لذا واضح است که $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$.

تمرین. فرض کنید f تابعی دو متغیره و مشتق‌پذیر بوده و z به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x و y به‌طور ضمنی توسط معادله $f(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = ۰$ داده شده است. نشان دهید رابطه زیر برقرار است

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$